А. Л. Вернер В. И. Рыжик

Геометрия

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

9 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

2-е издание, доработанное

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
В35

16+

Вернер А. Л.

В35 Геометрия. Методические рекомендации. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — 2-е изд., дораб. — М.: Просвещение, 2017. — 131 с.: ил. — ISBN 978-5-09-043922-0.

Эта книга адресована учителям, работающим по учебнику «Геометрия. 9 класс» (авторы: А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик). В ней даны важнейшие задачи курса, примерное тематическое планирование по главам и параграфам. Авторы предлагают теоретические методические рекомендации по урокам, контрольные работы, решения задач, тесты к главам учебника.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-043922-0

Оглавление

1. Теоретический материал

Важнейшая задача курса геометрии в 9 классе — познакомить выпускников основной школы с более современными (по сравнению с классической геометрией) *методами геометрии*: векторным методом, методом координат и методом преобразований. Именно этим методам посвящены первые две главы учебника: глава I. *Векторы и координаты* и глава II. *Преобразования*.

Изучение главы III *Геометрия круга* ведётся традиционным синтетическим методом элементарной геометрии. Курс геометрии в 9 классе можно было бы начать и с главы *Геометрия круга* (и тогда глава *Преобразования* становится последний главой курса геометрии основной школы). Завершать курс главой *Геометрия круга* (по мнению авторов) предпочтительнее, так как, изучая её, ученики повторят весь важнейший материал элементарной планиметрии. Поэтому планирование и краткие сценарии уроков мы даём в такой последовательности глав: 1) Векторы и координаты; 2) Преобразования; 3) Геометрия круга. Если же учитель пожелает завершать курс геометрии основной школы главой *Преобразования*, то функцию повторения важнейшего материала планиметрии выполнит параграф 10 *Подобие*, а в планировании учителю необходимо будет сделать соответствующие перестановки.

Примерное тематическое планирование 70 ч

Глава I. Векторы и координаты	**20 ч**
§ 1. Понятие вектора	4 ч
§ 2. Сложение и вычитание векторов	3 ч
§ 3. Умножение вектора на число	2 ч
§ 4. Векторная алгебра и векторный метод	1 ч
§ 5. Координаты	5 ч
§ 6. Скалярное умножение векторов	3 ч
Решение задач	1 ч
Контрольная работа № 1	1 ч
Глава II. Преобразования	**23 ч**
§ 7. Основные понятия	4 ч
§ 8. Движения	8 ч
§ 9. Симметрия фигур	4 ч
§ 10. Подобие	4 ч
Решение задач	2 ч
Контрольная работа № 2	1 ч
Глава III. Геометрия круга	**20 ч**
§ 11. Хорды, касательные, секущие	8 ч
§ 12. Вписанные и описанные окружности	5 ч
§ 13. Длина окружности и площадь круга	5 ч
§ 14. Цилиндр и конус. Сфера и шар	2 ч
Решение задач	1 ч
Контрольная работа № 3	1 ч
Заключение, итоговое повторение и итоговая контрольная работа	**5 ч**

Глава I. Векторы и координаты (20 ч, контрольная работа № 1)

§ 1. Понятие вектора. (1.1. Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки. 1.2. Сонаправленность векторов. 1.3. Равенство векторов. 1.4. О понятии вектора. 1.5. Угол между векторами.)

§ 2. Сложение и вычитание векторов. (2.1. Сложение векторов. 2.2. Свойства сложения векторов. 2.3. Вычитание векторов. Противоположные векторы.)

§ 3. Умножение вектора на число. (3.1. Умножение вектора на число. 3.2. Распределительные законы умножения векторов на число.)

§ 4. Векторная алгебра и векторный метод. (4.1. Векторный метод. 4.2. Об истории теории векторов.)

§ 5. Координаты. (5.1. Векторы на координатной оси. 5.2. Векторы на координатной плоскости. 5.3. Действия с векторами в координатной форме. 5.4. Метод координат. Уравнения окружности и прямой.)

§ 6. Скалярное умножение векторов. (6.1. Косинус. 6.2. Скалярное произведение векторов.)

Задачи к главе I.

Общие методические рекомендации к главе I «Векторы и координаты»

Глава I *Векторы и координаты* начинает знакомить школьников с идеями и методами современной («послееевклидовой») геометрии. Эти идеи и методы сейчас широко применяются как в самой математике, так и в её приложениях в естественных и гуманитарных науках. Аппарат векторной алгебры, координатный и векторный методы позволяют многие задачи элементарной геометрии решать проще и короче, чем при использовании традиционных её методов, опирающихся в основном на теоремы о треугольниках. Следует подчеркнуть, что аппарат координат и векторов применяется, по существу, совершенно одинаково в пространствах любой размерности (для школьников эти размерности равны 1, 2, 3).

Сначала в § 1—3 чисто геометрически введены понятие вектора и два линейных действия с векторами — их сложение и умножение на число. Уже этот материал в § 4 позволяет рассказать о векторном методе и проиллюстрировать его силу для доказательства теорем элементарной геометрии.

В § 5 сначала вводятся координаты векторов, а затем действия с векторами сводятся к аналогичным действиям с числами — координатами векторов. Об общей идее координатного метода и его применениях рассказано в последнем пункте § 5. С идеей координат ученики основной школы впервые знакомятся на уроках географии. Затем в курсе математики 5 и 6 классов появляются координаты на прямой и на плоскости. Построение графиков функций в курсе алгебры — это тоже метод координат.

Свойства скалярного умножения векторов (п. 6.2) тоже выведены с помощью координат векторов.

Если в § 1—4 мы чисто геометрически знакомим учеников с векторной алгеброй и в ней много внимания уделяется *построению* векторов, то в § 5—6 основное внимание уделяется задачам на *вычисление*. Обе эти стороны важны в геометрии векторов.

Более глубоко эти темы рассматриваются в учебнике «Геометрия, 9» (авторы: А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик) для углублённого изучения математики (М.: Просвещение, 2004).

О понятии вектора в школьном курсе геометрии А. Д. Александровым написана большая статья «Так что же такое вектор?» в журнале «Математика в школе» (1984. — № 5. — С. 39—46).

§ 1. Понятие вектора (4 ч)

1.1. Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки.
1.2. Сонаправленность векторов.
1.3. Равенство векторов.
1.4. О понятии вектора.
1.5. Угол между векторами.

Урок 1 (п. 1.1. *Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки*)

Цель урока. Ввести понятие векторной величины (вектора).

Анализируя характер различных геометрических и физических величин (расстояние, площадь, сила, перемещение из точки в точку, масса, скорость, давление, плотность и т. д.), учитель вместе с учениками делает вывод о том, что задать некоторые из них (расстояние, массу, площадь) можно одним числом (при заданной единице измерения), а для задания других (силы, скорости, давления) требуется указать не только их численное значение, но и направление. Первые величины называются скалярными, вторые — векторными или (короче) **векторами**. Именно с величинами, характеризующимися своим направлением и своим численным значением, должны быть связаны первые представления о векторах (так говорят и в физике), а не с фразой о том, что вектором называется направленный отрезок. Направленными отрезками *изображают* векторы. Их тоже называют векторами, что вполне допустимо, поскольку очень часто одним и тем же словом называют различные объекты. В математике *вектор* — это элемент векторного пространства, и формировать у учеников узкое и неполное представление о векторах лишь как о направленных отрезках не следует. Направленный отрезок — это *приложенный вектор*, а действия в векторной алгебре определяются для *свободных* векторов, чему фактически и посвящена вся глава I (20 уроков). Понятию *вектор* фактически отводится весь § 1 этой главы. В первых двух уроках довольно много новых понятий, терминов, обозначений: *направленный отрезок*, *модуль* (в геометрии — *длина*) *вектора*, *параллельные* и *перпендикулярные векторы*, *коллинеарные векторы*, *ортогональные векторы* (в п. 1.1), *сонаправленные* и *противоположно направленные лучи* и *векторы* (п. 1.2).

Урок 2 (п. 1.2. *Сонаправленность векторов*)

Цель урока. Ввести понятие сонаправленности векторов.

Давать определение понятию *направление* не нужно — вполне достаточно ограничиться наглядным представлением об этом понятии и сказать о способах задания *направления*: стрелки, указатели и т. д. Но чётко дать определение понятия о лучах и векторах, имеющих *одинаковые направления* (короче — о *сонаправленных лучах и векторах*), необходимо. Сначала определяется сонаправленность лучей через их перпендикулярность к некоторой прямой (на плоскости) или к плоскости (в пространстве), когда они лежат с одной стороны от этой прямой (от этой плоскости). Такой подход, одинаковый для плоскости и пространства, позволяет легко и единообразно доказать транзитивность отношения сонаправленности лучей, повторив при этом связи между отношениями параллельности и перпендикулярности. Тогда говорим, что ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, если сонаправлены лучи AB и CD, и имеем коллинеарность сонаправленных векторов и транзитивность отношения сонаправленности ненулевых векторов. Затем говорим о традиционном подходе к определению сонаправленности ненулевых векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, когда они, во-первых, коллинеарны и, во-вторых, лежат с одной стороны от прямой AC, и устанавливаем равносильность этих подходов.

Ненулевые векторы называем *противоположно направленными*, если они коллинеарны и не сонаправлены.

Урок 3 (п. 1.3. *Равенство векторов,* п. 1.4. *О понятии вектора.*)

Цель урока. Ввести понятия равенства векторов и нуль-вектора.

Сначала говорится о равенстве векторов — векторных величин. Поскольку вектор (векторная величина) характеризуется, во-первых, модулем (в геометрии — длиной) и, во-вторых, направлением, то равенство двух векторов — это, во-первых, равенство их модулей (в геометрии — длин) и, во-вторых, одинаковость их направлений — их сонаправленность (звено самолётов, летящих с одной скоростью, рота (шеренга) идущих солдат и т. п.). Если хотя бы одно из двух условий не выполняется — векторы не равны. Благодаря тому что каждое из этих отношений (равенство модулей и сонаправленность) является отношением эквивалентности, отношение равенства векторов обладает обычными свойствами равенств: рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью. Конечно, ученикам об этом говорится короче и проще (как в учебнике). Транзитивность отношения равенства векторов в учебнике именуется *первым признаком равенства векторов.*

Затем переходим к равенству векторов — направленных отрезков. Этим фактически вводится понятие *свободный вектор*. Оно появляется тогда, когда вводится операция *отложить от точки вектор* (*направленный отрезок*)*, равный данному вектору* (*направленному отрезку*). В дальнейшем в доказательствах часто будут использоваться ещё два признака равенства векторов — направленных отрезков: равенство сонаправленных противоположных сторон параллелограмма и равносильность равенств $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Последний признак для точек, лежащих на одной прямой, следует из простого переноса числа в алгебраическом равенстве с одной его стороны на другую с изменением знака. В этом доказательстве впервые появляются координаты векторов (для векторов, лежащих на одной прямой).

Наверное, п. 1.4 надо попросить учеников самостоятельно прочесть на уроке и задать вопросы о прочитанном. Введение нуль-вектора ещё раз подчёркивает, что нельзя говорить о векторе лишь как о направленном отрезке.

Итак, первые три урока посвящены обстоятельному введению понятия *вектор*. Это соответствует той роли этого понятия, которое оно играет в современной науке (не только в математике). Жалеть времени на него, ограничиваясь лишь фразой о том, что вектор — это направленный отрезок, не следует.

Урок 4 (п. 1.5. *Угол между векторами*)

Цель урока. Определить угол между ненулевыми векторами и доказать корректность этого определения.

Ключевой момент введения понятия *угол между векторами* — доказательство корректности его определения, т. е. независимости от выбора точки, от которой откладываются оба вектора. Равенство рассматриваемых углов можно было бы доказать, сведя его к соответственным углам, полученным при пересечении двух параллельных прямых третьей секущей прямой. Но мы свели его с помощью третьего признака равенства векторов к равенству соответственных углов равных треугольников. Это же построение поможет ещё раз и при доказательстве корректности в определении операции сложения векторов. Поэтому оно и предпочтительнее. Отметим, что особо с учащимися надо обсудить угол между сонаправленными и противоположно направленными векторами, а также то, что угол между векторами — величина, а не фигура.

§ 2. Сложение и вычитание векторов (3 ч)

2.1. Сложение векторов.
2.2. Свойства сложения векторов.
2.3. Вычитание векторов. Противоположные векторы.

Урок 5 (п. 2.1. *Сложение векторов*)

Цель урока. Ввести операцию *сложение векторов.*

Сначала определяем сложение векторов по правилу треугольника как сложение двух последовательных перемещений. Это правило можно применять для любых векторов. Корректность такого определения устанавливается с помощью третьего признака равенства векторов. Затем для неколлинеарных векторов рассматривается сложение векторов по правилу параллелограмма. С учениками обсуждаются соотношения между модулями векторов и модулем их суммы (задача 2.1).

Урок 6 (п. 2.2. *Свойства сложения векторов*)

Цель урока. Доказать свойства сложения векторов.

Сначала, естественно, стоит вспомнить, какими свойствами обладает операция сложения чисел. Первое свойство — коммутативность (перестановочность). Хорошо бы, чтобы ученики знакомились с обоими терминами — и русским, и латинским. Для неколлинеарных векторов коммутативность сразу и легко следует из правила параллелограмма и свойств параллелограмма. Для коллинеарных векторов доказательство коммутативности сложения труднее. Но хотя бы для одного случая (например, для сонаправленных векторов) его стоит провести в классе, подчеркнув ещё раз, что равенство векторов — это их сонаправленность, а также равенство их длин, и эти два условия мы и проверяем. Случай противоположно направленных векторов можно оставить для самостоятельной работы.

Доказательство второго свойства — ассоциативности — для любых трёх векторов следует из правила треугольника.

Ученикам необходимо объяснить, что лишь после доказательства этих свойств операции сложения при сложении любого числа векторов (как и при сложении чисел) можно переставлять и группировать слагаемые, но что, вообще говоря, бывают и такие операции, которые этими свойствами не обладают.

Урок 7 (п. 2.3. *Вычитание векторов. Противоположные векторы*)

Цель урока. Ввести понятия *вычитание векторов* и *противоположные векторы.*

Вычитание — это операция, обратная сложению (как и для чисел). Именно это легко запоминающееся выражение даёт ключ к более подробной формулировке определения разности двух векторов и к построению этой разности. Второй подход к операции вычитания векторов состоит в том, что вычитание векторов сводится к сложению уменьшаемого с вектором, противоположным для вычитаемого вектора. Может быть, этот второй подход даже проще первого (в нём меньше возможности для путаницы). Кроме того, он доказывает корректность построения разности векторов (поскольку корректность сложения уже была установлена).

§ 3. Умножение вектора на число (2 ч)

3.1. Умножение вектора на число.

3.2. Распределительные законы умножения векторов на число.

Урок 8 (п. 3.1. *Умножение вектора на число*)

Цель урока. Завершить знакомство учеников с линейными действиями с векторами.

Начать урок стоит с фразы, которую ученики слышали ещё в первом классе: «Умножение — это сокращённое сложение». И проиллюстрировать эту фразу равенством $a + a + a = 3a$. И если слагаемое в левой части — вектор, то приходим к определению операции *умножение вектора на число*: сначала говорим о длине этого вектора, затем о его направлении.

Шесть свойств, относящихся к одной операции умножения вектора на число, почти очевидны: проверка равенства двух векторов, состоящая в выяснении равенства их модулей и их сонаправленности, выполняется совсем легко. В п. 3.1 сделана проверка свойства 4. Проверку остальных свойств можно оставить для самостоятельной работы учеников.

Пункт 3.1 содержит важную теорему — характерное свойство коллинеарности векторов, сводящееся к операции умножения вектора на число. Она связывает два понятия — коллинеарность векторов и умножение вектора на число. Эта теорема затем часто будет применяться (например, при введении координат векторов). Поэтому её надо обстоятельно разобрать с учениками, выделив два взаимно обратных предложения, содержащиеся в ней. Следствие этой теоремы тоже важно — на него опирается вывод уравнений прямой.

Урок 9 (п. 3.2. *Распределительные законы умножения векторов на число*)

Цель урока. Закрепить знакомство учеников с обеими линейными операциями с векторами.

Два распределительных (дистрибутивных) закона связывают операции сложения векторов и умножения вектора на число. Им отведён отдельный п. 3.2. В первом из них один вектор умножается на сумму двух чисел. Проверка этого закона состоит из сложения или вычитания отрезков, лежащих на одной прямой, и ссылки на то, что при сложении отрезков длины их складываются, а при вычитании отрезков из длины большего вычитается длина меньшего. Этим и следует проиллюстрировать первый распределительный закон: сначала для чисел одного знака, затем для чисел противоположных знаков.

Во втором распределительном законе сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ умножается на действительное число x. Для рациональных чисел x этот закон доказывается в учебнике с применением уже доказанных правил (суть этого доказательства в том, что *умножение — это сокращённое сложение*). Для иррациональных x требуется предельный переход, о чём, конечно, ученикам не говорят. Заметим также, что для коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ второй закон является следствием первого и признака коллинеарности векторов.

§ 4. Векторная алгебра и векторный метод (1 ч)

4.1. Векторный метод.

4.2. Об истории теории векторов.

Урок 10 (п. 4.1. *Векторный метод*, п. 4.2. *Об истории теории векторов*)

Цели урока. Изложить суть векторного метода и продемонстрировать его силу при решении задач геометрии.

Можно в виде лекции учителя сначала показать на примере уже знакомой ученикам теоремы о средней линии треугольника, как эта теорема легко может быть доказана методами векторной алгебры (п. 4.1). И в этом доказательстве уже видна суть векторного метода при решении геометрической задачи: 1) формулировка задачи на векторном языке; 2) работа с аппаратом векторной алгебры; 3) истолкование полученного векторного решения на традиционном геометрическом языке.

В курсе геометрии общеобразовательной школы авторы ставили своей целью лишь самое общее знакомство с векторным методом. Более богатый материал содержится в параграфе, посвящённом этому методу, в учебнике «Геометрия. 9 класс» для углублённого изучения геометрии (§ 24) тех же авторов, что и в учебнике для общеобразовательных учреждений. Применяя векторный метод, раскладывают векторы на плоскости по двум неколлинеарным векторам. Как это можно сделать, показано в задаче 4.1 из рубрики *Разбираемся в решении.* Задачу 4.1 следует разобрать на уроке. Пункт 4.2 об истории векторов следует предложить для чтения дома.

§ 5. Координаты (5 ч)

5.1. Векторы на координатной оси.
5.2. Векторы на координатной плоскости.
5.3. Действия с векторами в координатной форме.
5.4. Метод координат. Уравнения окружности и прямой.

Урок 11 (п. 5.1. *Векторы на координатной оси*)

Цели урока. Определить координату вектора на оси и свести действия с векторами к действию с их координатами.

Векторы по природе своей многомерны, и векторный аппарат может применяться в пространствах любой размерности. Различия появляются лишь при переходе к координатам векторов, но эти различия состоят только в том, что число координат равно размерности пространства, а действия с этими координатами совершенно одинаковы для любой размерности. Но чтобы ученики увидели это, мы последовательно рассматриваем соответствующие вопросы в одномерном и двумерном случаях.

Введение координаты вектора на координатной оси (координатной прямой) подготовлено теоремой из п. 3.1 «Умножение вектора на число». Остаётся лишь в условии этой теоремы конкретизировать заданные в ней векторы, что и сделано при определении координаты вектора на оси. И после того как это сделано, равенство векторов на оси сводится к равенству их координат, а действия с векторами — к аналогичным действиям с их координатами.

Стоит провести аналогию между действиями с векторами на оси и действиями с действительными числами — их координатами.

Завершается этот важный пункт формулой, выражающей координату вектора — направленного отрезка в виде разности координат его конца и его начала. Из этой формулы следует выражение для модуля вектора на оси.

Урок 12 (п. 5.2. *Векторы на координатной плоскости*)

Цели урока. Разложить вектор на плоскости на составляющие по координатным осям и ввести координаты вектора.

После того как введена координата вектора на оси, определение координат вектора в пространстве любой размерности (в частности, двумерном — плоскости) сводится к разложению вектора на составляющие по осям координат, т. е. его представлению в виде суммы векторов, лежащих на этих осях, а это, в свою очередь, сводится к проектированию вектора на каждую ось. Поэтому физики говорят не о координатах вектора, а о его проекциях и часто рассматривают проектирование вектора лишь на одну из осей (существенную для решаемой задачи). Конечно, и система координат, и проектирование — ортогональные. Стоит сразу же решить задачу 5.8 о том, что проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.

Далее изложение материала следует по тому же плану, что и в одномерном случае. После того как появляется пара чисел — координат вектора, можно на вектор на плоскости смотреть как на эту пару, что затем обобщается в подходе к вектору как упорядоченному набору n чисел для n-мерного пространства.

Урок 13 (п. 5.2. *Векторы на координатной плоскости*)

Цель урока. Вывести формулы, выражающие длину вектора через его координаты, расстояние между точками через их координаты и координаты середины отрезка.

Формула, выражающая квадрат модуля вектора через сумму квадратов его координат, — это ещё один из вариантов теоремы Пифагора (сказать об этом необходимо). После того как координаты вектора выражаются как разности координат его конца и начала, получаем, во-первых, формулу для расстояния между точками — одну из основных формул аналитической геометрии, а во-вторых, формулу для координат середины отрезка как полусуммы соответствующих координат концов отрезка.

Урок 14 (п. 5.3. *Действия с координатами векторов в координатной форме*)

Цель урока. Свести действия с векторами к действиям с их координатами.

Доказательства двух основных свойств действий с координатами векторов вполне аналогичны доказательствам этих свойств в одномерном случае. Новым является лишь признак коллинеарности векторов — пропорциональность их координат. Этот признак важен, и ученикам его следует запомнить.

Урок 15 (п. 5.4. *Метод координат. Уравнения окружности и прямой*)

Цели урока. Сказать о том, что значит: *алгебраическое уравнение задаёт фигуру*, вывести уравнения окружности и прямой.

Главная идея метода координат — применение алгебраических методов в решении геометрических задач. Начинается этот метод с задания фигур уравнениями. Об этом и идёт речь сначала при выводе уравнения окружности, а затем при выводе уравнения прямой.

§ 6. Скалярное умножение векторов (3 ч)

6.1. Косинус.

6.2. Скалярное произведение векторов.

Урок 16 (п. 6.1. *Косинус*)

Цели урока. Повторить определение косинуса угла и расширить его для тупых углов (если в 8 классе косинус определялся лишь для острых углов). Доказать теорему косинусов (или повторить её, если она уже была известна ученикам).

Косинус нужен и при проектировании вектора на ось, и для скалярного произведения векторов. Поэтому понятие *косинус угла* повторяем перед пунктами, посвящёнными этим вопросам. Косинус любого угла A определяем как отношение проекции AC отрезка AB, отложенного на одной стороне угла A на другую его сторону (или её продолжение), к отрезку AB, взятое со знаком плюс, если угол A острый, и со знаком «минус», если он не острый. Корректность такого определения следует из определения синуса, данного в § 6 учебника «Геометрия, 8». Оно сейчас в главе *Векторы и координаты* не существенно, но будет обсуждаться при повторении синуса в § 10 *Подобие*.

Свойства косинуса можно проследить, проектируя точку B единичной окружности с центром в точке A на горизонтальный диаметр, считая, что этот диаметр лежит на координатной оси с началом в точке A. Тогда координата точки C на этой оси и будет косинусом угла BAC. Эта координата монотонно убывает от 1 до –1 при возрастании угла от 0 до 180°.

Теперь формулируется теорема косинусов и доказывается для случая острого угла. Случай прямого угла — это теорема Пифагора, а случай тупого угла предлагается для самостоятельной работы на дом.

Урок 17 (п. 6.2. *Скалярное произведение векторов*)

Цели урока. Определение скалярного умножения векторов и вывод его вычислительной формулы.

Начать надо с практической задачи о работе силы при некотором перемещении. Затем дать определение скалярного произведения двух векторов и установить простейшие свойства скалярного произведения, вытекающие непосредственно из его определения: коммутативность, условие обращения в нуль, введение скалярного квадрата и выражение через него модуль — вектора. Завершить эту часть урока выводом вычислительной формулы для скалярного произведения (через координаты векторов).

Урок 18 (п. 6.2. *Скалярное произведение векторов*)

Цель урока. Доказательство линейности скалярного умножения векторов, т. е. его однородности (свойство 2) и дистрибутивности (свойство 3).

После того как получена формула для вычисления скалярного умножения векторов через их координаты, доказательства всех его свойств становятся простыми упражнениями в алгебре. В классе стоит вывести, например, дистрибутивность скалярного умножения, а однородность попросить учеников вывести самостоятельно.

Урок 19 (*Решение задач по главе I «Векторы и координаты»*)

Урок 20 (*Контрольная работа № 1 по главе I «Векторы и координаты»*)

Вариант 1

1. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых равны 2 см и угол между которыми равен 60°.

а) Постройте векторы $2\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$.

б) Вычислите модули векторов $2\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ и их скалярное произведение.

в) Найдите косинус угла между векторами $2\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$.

2. На плоскости введены прямоугольные декартовы координаты x, y с началом в точке O и заданы точки $A(3; 2)$, $B(4; 4)$, $C(-4; -1)$ и $D(-2; 3)$.

а) Вычислите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.

б) Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{CD}$ сонаправлены.

в) Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD} = (-3;\ 6)$ и $\overrightarrow{BC} = (-5; -8)$.

3. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C_1C}$.

Решения

1. б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2$, $|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4\vec{a}^{\,2} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2} = 16 + 8 + 4 = 28$,
$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a}^{\,2} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2} = 16 - 8 + 4 = 12$,
$(2\vec{a} + \vec{b})\cdot(2\vec{a} - \vec{b}) = = 16 - 4 = 12$. в) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

2. а) $\overrightarrow{AB} = (1;\ 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-8;\ -5)$, $\overrightarrow{CD} = (2;\ 4)$. $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD} = (-3;\ -6)$. $(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{BC} = 15 + 48 = 63$.

3. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$.

Вариант 2

1. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых равны 2 см и угол между которыми равен 120°.

а) Постройте векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$.

б) Вычислите модули векторов $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$ и их скалярное произведение.

в) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$.

2. На плоскости введены прямоугольные декартовы координаты x, y с началом в точке O и заданы точки $A(-3; 2)$, $B(-4; 4)$, $C(4; -1)$ и $D(2; 3)$.

а) Вычислите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.

б) Докажите, что векторы $3\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены.

в) Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.

3. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$.

Решения

1. б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2\cdot\cos 120° = -2$, $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^{\,2} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^{\,2} = 4 - 8 + 16 = 12$,
$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^{\,2} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^{\,2} = 4 + 8 + 16 = 28$,
$(\vec{a} + 4\vec{b})\cdot(\vec{a} - 4\vec{b}) = 4 - 16 = -12$. в) $-\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

2. а) $\overrightarrow{AB} = (-1; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (8; -5)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 4)$.

в) $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = -4 + 6 = 2$.

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BC_1}$.

Глава II. Преобразования
(23 ч, контрольная работа № 2)

§ 7. Основные понятия. (7.1. Понятие преобразования. 7.2. Важные примеры преобразований. 7.3. Взаимно обратные преобразования. 7.4. Композиция преобразований.)

§ 8. Движения. (8.1. Определение и простейшие свойства движений. 8.2. Свойства фигур, сохраняющиеся при движении (инварианты движений). 8.3. Параллельный перенос. 8.4. Центральная симметрия. 8.5. Осевая симметрия на плоскости. 8.6. Зеркальная симметрия. 8.7. Поворот на плоскости. 8.8. Классификация движений плоскости. 8.9. Равенство фигур и движения.)

§ 9. Симметрия фигур. (9.1. Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур. 9.2. Фигуры, обладающие переносной симметрией. 9.3. Элементы симметрии фигур. 9.4. Симметрия правильных многоугольников, правильных пирамид и призм. 9.5. Правильные многогранники.)

§ 10. Подобие. (10.1. Преобразование подобия и его простейшие свойства. 10.2. Гомотетия. 10.3. Свойства подобных фигур. 10.4. Признаки подобия треугольников.)

Задачи к главе II.

Общие методические рекомендации к главе II «Преобразования»

1. Геометрические преобразования в школьном курсе. Основные понятия и терминология. О преобразованиях фигур говорил ещё Евклид, когда он формулировал аксиому 7: *и совмещающиеся друг с другом равны между собой.* И при доказательствах теорем, основанных на понятии *наложение*, речь идёт также о преобразованиях фигур. Любое дополнительное построение, выполняющееся при доказательстве теоремы или при решении задачи, — это тоже преобразование фигуры. Преобразование пространственных фигур в плоские происходит, когда эти фигуры изображаются в рисунках или чертежах. Эти примеры можно продолжить. Так что преобразования фигур присутствуют во всех курсах геометрии и вопрос состоит в том, применяются ли преобразования в этом курсе на наглядно-интуитивном уровне, без каких бы то ни было определений (например, *вращение вокруг прямой* в учебнике А. П. Киселёва), является ли рассматриваемое преобразование лишь средством в теории и при решении задач, или некоторое преобразование или класс преобразований становятся сами предметом изучения. Разные учебники геометрии по-разному отвечают на поставленный вопрос. Так что диапазон изучения преобразований в разных учебниках геометрии весьма широк. Появление в школе компьютерной техники позволяет изучать эту тему на новом, динамическом, уровне, невозможном ранее при статичных иллюстрациях в школьных учебниках и учебных пособиях.

В начале XXI века положение с изучением преобразований в школьном курсе геометрии примерно такое же, как в начале XX века было положение с изучением функций в алгебре: курс геометрии сейчас должен обогатиться общей идеей геометрического преобразования так же, как курс алгебры век тому назад обогатился общей идеей функционального подхода.

На наш взгляд, о геометрических преобразованиях в курсе геометрии можно говорить как о геометрических аналогах числовых функций, столь детально изучающихся в курсе алгебры и начал анализа: числовые функции сопоставляют число числу, а геометрические преобразования сопоставляют точке точку. Именно об этом и говорит определение, данное в п. 7.1. *Понятие преобразования*:

Преобразование f фигуры M состоит в том, что каждой её точке X сопоставляется некоторая точка $f(X)$. Все точки $f(X)$ образуют некоторую фигуру $f(M)$, и говорят, что фигура M преобразуется в фигуру $f(M)$. Говорят также, что точка $f(X)$ является *образом точки X*, а фигура $f(M)$ — *образом фигуры M* для данного преобразования f.

Этих понятий достаточно для изучения всего материала, включённого в Федеральные государственные образовательные стандарты второго поколения курса геометрии основной школы. Если формально подходить к изучению преобразований в курсе основной школы, то изучение п. 7.2. *Важные примеры преобразований* обеспечивает выполнение этого стандарта.

В учебнике «Геометрия, 9» об общих понятиях сказано подробнее. Там определяются: 1) *взаимно однозначные* (*обратимые*) *и обратные преобразования* (п. 7.3); 2) *композиция преобразований* (п. 7.4); 3) *неподвижная точка преобразования* (п. 7.1).

Необходимость этих понятий вызвана тем, что, используя их, в учебнике «Геометрия, 9» предоставляется возможность о каждом конкретном преобразовании сказать более полно, а не только ограничиться его определением и в целом придать главе II «*Преобразования*» завершённость, дав в ней формулировки классификационных теорем о движениях и подобии.

Сопоставление точке её образа для каждого частного вида преобразования обычно задаётся конструктивно, как результат некоторого геометрического построения.

2. Движения. Движения фигур (как на плоскости, так и в пространстве) — это преобразования фигур, сохраняющие расстояния между точками. В § 8 движения являются самостоятельным объектом изучения: сначала изучаются общие свойства — инварианты — движений (пп. 8.1 и 8.2), затем изучаются частные виды движений — параллельный перенос (п. 8.3), центральная симметрия (п. 8.4), осевая симметрия на плоскости (п. 8.5), зеркальная симметрия (п. 8.6), поворот на плоскости (п. 8.7). В кратком п. 8.8 формулируется теорема Шаля о классификации движений плоскости. Понятие движения позволяет дать общее определение равенства фигур как фигур, совмещающихся некоторым движением (п. 8.9).

Изучение частных видов движений ведётся по такой единообразной структуре:

1) Повторение уже знакомого ученикам конструктивного определения изучаемого преобразования; в нём ещё не говорится о том, что оно — движение.

2) Вытекающие из этого определения способ задания изучаемого преобразования и способ построения образа фигуры для этого преобразования.

3) Множество неподвижных точек данного преобразования.

4) Доказательство, что изучаемое преобразование является движением, и выяснение, каково характеристическое свойство этого движения.

5) Движение, обратное для данного движения.

6) Композиция рассматриваемых движений друг с другом и с ранее рассмотренными.

7) Задание этого движения в координатах (если это не слишком сложно).

Характеристические свойства частных видов движений позволяют их конструктивные определения дополнить описательными (дескриптивными). Например, перенос — это движение, сохраняющее направления, а центральная симметрия — это движение, изменяющее направления на противоположные.

3. Симметрия как свойство фигур. Идея *симметрии* (не только в геометрии) — важнейшая общекультурная идея. Напомним, что греческое слово *симметрия* означает «согласованность размеров, *соразмерность*». Окружающий нас мир во многом симметричен: симметричны снежинки и кристаллы, цветы и листья, тела насекомых и животных и т. д. и т. п. И всё созданное человеком тоже чаще всего симметрично: архитектурные сооружения, мебель, посуда, автомобили и самолёты и т. д. Симметрию мы находим и в музыке (в мелодиях и ритмах), и в поэзии (в размерах и рифмах), и в спортивных играх.

А в геометрии, изучая тот или иной класс фигур, мы рассматриваем более подробно среди фигур этого класса наиболее симметричные: равнобедренные и равносторонние треугольники в классе треугольников, правильные пирамиды и правильные призмы среди пирамид и призм и т. п.

Характер изучения вопросов, связанных с симметрией фигур в § 9, отличен от того логически строгого изложения, которое присуще традиционной геометрии: изучение этих вопросов во многом описательно, здесь на первый план выходят наглядность и живое пространственное воображение. (Заметим, что для многих учеников, которым не слишком близка логика геометрии, в этих вопросах геометрия становится интересной.) Эстетическая окраска курса геометрии при изучении симметрии усилится, если его иллюстрировать примерами из тех областей, о которых уже было сказано (архитектуры, техники, живой природы и т. д.). Имеется богатая научно-популярная литература, связанная с симметрией. Укажем, например, такие книги:

Вейль Г. Симметрия. — М.: ЛКИ, 2007.

Тарасов Л. Этот удивительно симметричный мир. — М.: Просвещение, 1992.

Волошинов А. В. Математика и искусство. — М.: Просвещение, 2000.

Движения фигуры, совмещающие её саму с собой, называют её *преобразованиями симметрии.* Преобразования симметрии фигуры обладают групповыми свойствами (относительно операции композиции преобразований). А именно если движения совмещают фигуру саму с собой, то их композиция (в любом порядке) тоже совмещает эту фигуру саму с собой; если какое-то движение совмещает фигуру саму с собой, то обратное ему движение тоже совмещает фигуру саму с собой.

Совокупность всех преобразований симметрии фигуры (включая тождественное преобразование) называют её *группой симметрии.*

Изучая симметрию различных фигур, имеющих в своих названиях слово *правильный* (*правильная*), можно заметить, что их симметрия богаче, чем у аналогичных фигур, не являющихся правильными (пп. 9.4 и 9.5). Например, максимальная симметричность многоугольника означает, что для любых двух его вершин A и B и для любых двух его сторон a и b, исходящих из этих вершин, существует такая его симметрия (такое преобразование симметрии) f, что $f(A) = B$ и $f(a) = b$. Ясно, что у многоугольника, обладающего такой симметричностью, равны друг другу все его стороны и равны друг другу все его углы, т. е. он является правильным. Ясно также, что правильные многоугольники обладают указанной максимальной симметричностью.

Аналогичное верно и для правильных многогранников. Мы определили правильные многогранники как те, у которых равны друг другу рёбра, углы граней и двугранные углы. Но можно было бы их определить как максимально симметричные многогранники. Это означает следующее. Если у правильного многогранника P взять вершину A, идущее из неё ребро a и грань α, прилегающую к этому ребру, а затем взять ещё один такой набор из вершины A_1, ребра a_1 и грани α_1, то найдётся такое движение многогранника P, которым вершина A, ребро a и грань α отображаются соответственно в вершину A_1, ребро a_1 и грань α_1. Это свойство является характеристическим свойством правильного многогранника — им обладают только правильные многогранники. Поэтому можно было бы определить правильный многогранник как многогранник, обладающий свойством максимальной симметричности.

Аналогичный подход возможен и для определения правильных призм и правильных пирамид. Подумайте, как дать такие определения.

4. Подобие. Ситуация с подобием фигур аналогична ситуации с равенством фигур. Сначала определялось равенство треугольников равенством их соответственных сторон (в 7 классе), а затем (в 9 классе) давалось общее определение равенства фигур и устанавливалось, что эти определения равносильны. Так и с подобием треугольников: сначала (в 8 классе) подобие треугольников определялось пропорциональностью их соответственных сторон, а затем (в 9 классе) даётся общее определение подобия фигур и устанавливается, что для треугольников такие два подхода не противоречат друг другу.

Стоит ещё раз подчеркнуть, что любое из характеристических свойств объекта может быть взято в качестве определения этого объекта.

Поэтому и пункт 10.4 *Признаки подобия треугольников*, с одной стороны, носит повторительный характер, а с другой — даёт новый взгляд на подобие треугольников. Новым же материалом в этой теме станет изучение гомотетии и её свойств (п. 10.2), теорема о преобразовании подобия как о композиции гомотетии и движения, а затем получение общих свойств подобия из общих свойств движения и гомотетии.

Если же кто-то из учеников в 8 классе не изучал подобия треугольников, то он эту тему изучит в пункте 10.4, а затем прочно закрепит на теоремах в главе III *Геометрия круга*.

§ 7. Основные понятия (4 ч)

7.1. Понятия преобразования
7.2. Важные примеры преобразований.
7.3. Взаимно обратные преобразования.
7.4. Композиция преобразований.

Урок 21 (п. 7.1. *Понятие преобразования*)

Цели урока. Познакомить учеников с общим понятием геометрического преобразования и связанной с ним терминологией, а затем проиллюстрировать это понятие на важных примерах.

Рассказ учителя об изменяющихся, движущихся, преобразующихся реальных фигурах. Среди приводимых им примеров могут быть проекции фигур. Переход от реальных фигур к *преобразованиям* абстрактных геометрических фигур. *Сопоставление* каждой точке некоторой фигуры *соответствующей ей* определённой точки — её *образа.* Сравнение с определением числовой функции и вывод, что изучение преобразования фигур столь же важно, как и изучение функций в алгебре. Вводятся понятия *образа фигуры* (аналогия с множеством значений функции, обсуждение многозначности значений слова *образ* в литературе, религии и т. п.), *неподвижной точки преобразования* и *тождественного преобразования*.

Урок 22 (п. 7.2. *Важные примеры преобразований*)

Цель урока. Проиллюстрировать общие понятия, введённые на предыдущем уроке важнейшими примерами преобразований — симметриями, параллельным переносом и гомотетией.

Общие понятия, рассмотренные в п. 7.1, конкретизируются в п. 7.2 пятью важными примерами геометрических преобразований:

1) *центральная симметрия*;

2) *осевая симметрия*;

3) *зеркальная симметрия*;

4) *параллельный перенос*;

5) *гомотетия*.

Ученики строят образы простых фигур (точек, отрезков, треугольников, квадратов, окружностей) для рассмотренных преобразований. Эту работу хорошо бы делать на компьютере, но можно и просто карандашом на бумаге.

Проверить усвоение изученного материала можно, предложив выполнить задания.

Среди рассмотренных пяти примеров преобразований укажите такое преобразование при котором образом:

1) круга является круг, радиус которого в два раза больше;

2) каждой из двух заданных параллельных прямых является другая из них;

3) фигуры M, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 2$, является фигура N, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$;

4) каждой грани куба является противоположная ей грань.

Урок 23 (п. 7.3. *Взаимно обратные преобразования*)

Цель урока. Познакомить учеников с понятиями обратимого геометрического преобразования и взаимно обратных преобразований.

Сравнивая преобразования, рассмотренные на предыдущем уроке, замечаем, что все они разным точкам сопоставляют разные точки. Преобразования, обладающие таким свойством, называются *взаимно однозначными*.

Пусть задано взаимно однозначное преобразование f фигуры P, а образом её является фигура Q: $f(P) = Q$. Тогда у каждой точки Y фигуры Q имеется ровно один её прообраз — такая точка X, что $Y = f(X)$. Сопоставляя каждой точке Y фигуры Q её прообраз — точку X фигуры P, получаем преобразование фигуры Q в фигуру P. Оно называется *обратным для преобразования* f и обозначается f^{-1}. В этом случае говорят также, что преобразование f *обратимо.*

Замечаем, что если преобразование f обратимо, то обратное для него преобразование f^{-1} также обратимо и для него обратным будет исходное преобразование f, т. е. $(f^{-1})^{-1} = f$. Поэтому о преобразованиях f и f^{-1} говорят как о *взаимно обратных*. В этом месте можно сказать и о взаимно обратных числовых функциях, заданных на числовых отрезках: например, о функции $y = x^2$ на отрезке [1; 2] и функции $x = \sqrt{y}$ на отрезке [1; 4].

Далее выясняем, какими являются преобразования, обратные для преобразований 1—5 п. 7.2. Особо отмечается, что *преобразования, обратные для каждой из симметрий, совпадают с исходными симметриями.*

Проверить усвоение изученного материала можно, задав такие вопросы:

Являются ли обратимыми следующие преобразования:

1) проектирование окружности на её диаметр;
2) проектирование полуокружности на её диаметр;
3) сопоставляющее каждой точке окружности центр этой окружности;
4) симметрия окружности относительно центра этой окружности;
5) симметрия окружности относительно прямой, проходящей через её центр?

Урок 24 (п. 7.4. *Композиция преобразований*)

Цели урока. Познакомить учеников с понятием композиции преобразований, а затем проиллюстрировать это понятие на примерах.

Последовательно выполняя два преобразования, приходим к понятию ***композиции преобразований***. Затем можно рассмотреть такой пример: взять разносторонний треугольник ABC с центром масс O и выполнить последовательно такие преобразования отрезка AB: а) перенос на вектор AO, а затем симметрию относительно AC; б) симметрии относительно прямых AC и BC; в) гомотетию с центром O и коэффициентом 2, а затем перенос на вектор AC. Понятие композиции преобразований иллюстрируется и на числовых функциях. Именно на примерах преобразований числовых отрезков удобно проиллюстрировать некоммутативность операции композиции преобразований $(2x)^2 \neq 2(x^2)$ и т. п.

§ 8. Движения (8 ч)

8.1. Определение и простейшие свойства движений.
8.2. Свойства фигур, сохраняющиеся при движении (инварианты движений).
8.3. Параллельный перенос.
8.4. Центральная симметрия.
8.5. Осевая симметрия на плоскости.

8.6. Зеркальная симметрия.
8.7. Поворот на плоскости.
8.8. Классификация движений плоскости.
8.9. Равенство фигур и движения.

Урок 25 (п. 8.1. Определение и простешие свойства движений)

Цель урока. Познакомить учеников с понятием движения в геометрии и механике.

Учитель говорит, что ученикам предстоит изучить два важнейших класса преобразований: движения и подобия. Движения — это те преобразования фигур, которые сохраняют расстояния между точками. Пример для учеников: на листе бумаги отметить две точки, измерить расстояние между ними, переместить лист и снова измерить расстояние. Важность движений в том, что ***при движениях фигура сохраняет свою форму и все свои размеры***, поскольку ***все*** геометрические величины можно выразить через расстояния. Ученики вспоминают формулы, выражающие различные величины через длины (для площадей, для углов — тригонометрия, для объёмов), и утверждения о равенстве фигур, имеющих соответственно равные линейные размеры (треугольников — по трём сторонам, прямоугольников — по их измерениям, окружностей — по радиусам).

Выясняется, что движение обратимо и что композицией движений является движение.

Затем либо учитель говорит о различии в понятиях движения в механике и геометрии, либо ученики сами читают об этом в пособии *Разговор о механическом и геометрическом движении.*

Урок 26 (п. 8.2. Свойства фигур, сохраняющиеся при движении (инварианты движений)

Цели урока. Ввести понятие *инварианта преобразования* — свойства фигуры, сохраняющегося при преобразовании, и изучить важнейшие инварианты движений.

На этом уроке конкретизируется общее утверждение о том, что движение сохраняет все свойства фигур. Ключевым здесь является предложение о том, что при движении образом отрезка является отрезок. Многие фигуры конструируются из отрезков: отрезки «вытягиваются» в лучи, в прямые, ими «заметаются» треугольники, круги, а также тетраэдры. Из треугольников составляются многоугольники, из тетраэдров — многогранники. Удобно для свойств, сохраняющихся для рассматриваемых преобразований, ввести термин *инварианты преобразований*. Этот термин позволяет более кратко формулировать предложения о сохраняющихся свойствах.

Ученикам предлагается представить, какие из пяти важных примеров преобразований являются движениями (доказательства правильности их гипотез будут даны на следующих уроках), а затем нарисовать несколько пар равных (одинаковых) фигур (треугольников, квадратов, окружностей и т. п.) и движениями первую из этих фигур преобразовать во вторую. Такую работу можно выполнить и на бумаге, и с помощью компьютера.

В конце урока можно предложить такое задание: является ли движением на координатной плоскости x; y преобразование, которое точке (x; y) ставит в соответствие точку с координатами: 1) ($-x$; $-y$); 2) ($2x$; $2y$); 3) (x; $-y$); 4) ($x - 2$; $y + 2$); 5) (0; y)?

Урок 27 (п. 8.3. *Параллельный перенос*)

Цель урока. Подробно изучить параллельный перенос.

Уроки 22, 25, 26 подготовили возможность детально изучить каждое из конкретных движений плоскости, первое знакомство с которыми состоялось уже на уроке 22. Такому изучению отводятся четыре следующих урока. Все они строятся по следующей схеме:

1) Повторение уже знакомого ученикам конструктивного определения изучаемого преобразования. В нём ещё не говорится о том, что оно — движение.

2) Вытекающие из этого определения способ задания изучаемого преобразования и способ построения образа фигуры для этого преобразования.

3) Множество неподвижных точек данного преобразования.

4) Доказательство, что изучаемое преобразование является движением, и выяснение, каково характеристическое свойство этого движения.

5) Рассмотрение движения, обратного для данного движения.

6) Изучение композиции рассматриваемых движений друг с другом и с ранее изученными.

Параллельный перенос является самым простым из всех движений, и все перечисленные пункты выполняются очень легко. При этом нет различий для плоскости и пространства.

1) Повторяется определение, данное в п. 7.2.

2) Каждая пара «точка и её образ» задают вектор переноса, а значит, задают и сам перенос. Построение образа выбранной точки состоит в откладывании от неё вектора, равного вектору переноса.

3) Неподвижных точек у переноса на ненулевой вектор нет, а если вектор переноса нулевой, то такой перенос — тождественное преобразование и все его точки — неподвижные.

4) Вывод из определения переноса векторного равенства $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X''Y''}$, которое сразу доказывает утверждение о том, что перенос — движение, а также даёт характеристическое свойство переноса. Характеристическое свойство переноса среди всех движений — сохранение направлений. Получаем возможность дать переносу описательное определение: ***перенос — это движение, сохраняющее направления.*** При решении задач, в которых требуется узнать вид движения, это свойство очень удобно.

5) Движение, обратное для переноса, является тоже переносом на противоположный вектор.

6) Композиция двух переносов — перенос, вектор которого равен сумме векторов исходных переносов. Поэтому ***композиция переносов перестановочна (коммутативна).***

Ученикам предлагается построить образы простейших многоугольников при переносе их центра масс в одну из вершин исходного многоугольника, построить пересечение исходного многоугольника и его образа и найти площадь пересечения или объединения; работу можно выполнить как на компьютере, так и без него.

Проверить усвоение изученного материала можно, предложив следующее задание:

Найдётся ли такой перенос, при котором образом фигуры M является фигура P, если:

1) M — это сторона параллелограмма, а P — другая сторона этого же параллелограмма;

2) M — это квадрат, а P — это другой квадрат и диагонали этих квадратов равны и параллельны;

3) M — это угол, а P — другой угол и стороны этих углов соответственно параллельны;

4) M — это график функции $y = x^2 - 2x + 1$, а P — это график функции $y = x^2 - 2x + 2$;

5) M и P — две фигуры, полученные переносами из одной и той же фигуры N?

Урок 28 (п. 8.4. *Центральная симметрия*)

Цель урока. Подробно изучить центральную симметрию.

Изучение центральной симметрии ведётся по той же схеме, которая была предложена при изучении переноса на предыдущем уроке.

1) Повторяется конструктивное определение, данное в п. 7.2.

2) Центр O симметрии задаёт центральную симметрию. Построение образа Y выбранной точки X (отличной от O) состоит в откладывании от точки O отрезка $OY = OX$ на луче, противоположном лучу OX.

3) Центр симметрии является единственной неподвижной точкой центральной симметрии.

4) Вывод из определения центральной симметрии векторного равенства $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{X''Y''}$, которое сразу доказывает утверждение о том, что центральная симметрия — движение, а также даёт её характеристическое свойство. Характеристическое свойство — изменение направлений на противоположные. С помощью него удаётся выделить центральную симметрию среди движений и получить возможность дать центральной симметрии описательное определение: ***центральная симметрия — это движение, изменяющее направления на противоположные.*** При решении задач, в которых требуется узнать вид движения, это свойство очень удобно.

5) Как и у всех симметрий, обратным преобразованием для центральной симметрии является она сама.

6) Применяя характеристические свойства переноса и центральной симметрии, получаем, что композиция двух центральных симметрий является переносом. Выясняем, каков вектор этого переноса. Обсуждается некоммутативность этой композиции.

Можно обратиться к *новой динамической модели*: поставить две точки A и B, взять любую фигуру («кляксу») и последовательно выполнить с «кляксой» сначала симметрию с центром A, а затем симметрию с центром B: получится перенос на вектор $2\overrightarrow{AB}$; поменять порядок симметрий и получить перенос на вектор $2\overrightarrow{BA}$.

Ученикам предлагается построить образы простейших многоугольников при центральной симметрии относительно некоторой точки, внутри многоугольника (например, их центра масс) построить пересечение исходного многоугольника и его образа и найти площадь пересечения или объединения; работу можно выполнить как на компьютере, так и без него.

Проверить усвоение изученного материала можно, предложив такое задание:

Найдётся ли такая центральная симметрия, при которой образом фигуры M является фигура P, если:

1) M — это сторона параллелограмма, а P — противоположная ей сторона этого же параллелограмма;

2) M — это квадрат, а P — это другой квадрат и диагонали этих квадратов равны и параллельны;

3) M — это грань куба, а P — это противоположная ей грань того же куба;

4) M — это график функции $y = x^2 - 2x + 1$, а P — это график функции $y = -x^2 - 2x - 1$;

5) M и P — два треугольника, полученные центральными симметриями из одного и того же треугольника N?

<u>*Урок* 29 (п. 8.5. *Осевая симметрия на плоскости*)</u>

Цель урока. Подробно изучить осевую симметрию.

Изучение осевой симметрии ведётся по той же схеме, которая была предложена при изучении параллельного переноса и центральной симметрии на двух предыдущих уроках.

1) Повторяется конструктивное определение, данное в п. 7.2.

2) Осевая симметрия задаётся некоторой прямой a — осью симметрии. Построение образа выбранной точки X состоит в построении точки X', симметричной точке X относительно прямой a. Это построение давно известно ученикам.

3) Точки оси симметрии являются неподвижными точками осевой симметрии.

4) Для доказательства того, что осевая симметрия является движением, удобно применить метод координат. Если ось симметрии выбрать за ось x, то осевая симметрия задастся простыми формулами: $x' = x$ и $y' = -y$. Из этих формул и формулы для вычисления расстояния между точками и вытекает утверждение, что осевая симметрия — движение. Характеристическое свойство осевой симметрии — ***движение плоскости, у которого множество его неподвижных точек — некоторая прямая, является симметрией относительно этой прямой.*** Можно доказательство этого утверждения оставить лишь для сильных учеников.

5) Как и у всех симметрий, обратным преобразованием для осевой симметрии является она сама.

6) Из композиций осевой симметрии с параллельным переносом или центральной симметрией достаточно ограничиться композицией осевой симметрии с переносом на

вектор, параллельной оси симметрии (скользящей осевой симметрией) — задача 8.24.

Ученикам предлагается построить образы простейших многоугольников при композиции двух осевых симметрий относительно параллельных и взаимно перпендикулярных осей и угадать, какое из известных уже им движений получится в результате. Затем можно усложнить задачу и рассмотреть композицию двух осевых симметрий с пересекающимися, но не взаимно перпендикулярными осями. Эти задачи полезно решать дважды, меняя порядок осей и наблюдая за полученным результатом. Работу можно выполнить как на компьютере, так и без него.

Проверить усвоение изученного материала можно, предложив такое задание:

Найдётся ли такая осевая симметрия, при которой образом фигуры M является фигура P, если:

1) M — это сторона ромба, а P — противоположная ей сторона этого же ромба;

2) M — это круг, а P — это другой круг того же радиуса;

3) M — это угол, а P — это равный ему угол, имеющий ту же вершину, что и M;

4) M — это график функции $y = x^2 - 2x + 1$, а P — это график функции $y = x^2 + 2x + 1$;

5) M и P — это два треугольника, симметричные неравнобедренному прямоугольному треугольнику ABC с катетами AC и BC относительно прямых AC и BC?

Урок 30 (п. 8.6. *Зеркальная симметрия*)

Цель урока. Рассмотреть зеркальную симметрию.

Урок ведётся по той же схеме, что и предыдущий урок об осевой симметрии на плоскости. Прослеживается аналогия этих преобразований.

Урок 31 (п. 8.7. *Поворот на плоскости*)

Цели урока. Определить и изучить поворот на плоскости.

Поворот на плоскости — самое сложное из движений на плоскости. Уже его определение, включающее в себя понятие о направлении поворота, выходит за рамки формальной математики и обращается к наглядным представлениям. Поэтому поворот не включался в число примеров, рассмотренных на первом уроке. Урок строим по той же схеме, что и предыдущие четыре урока.

1) Конструктивное определение поворота.

2) Поворот задаётся, во-первых, центром поворота — некоторой точкой O, во-вторых, углом поворота φ и, в-третьих, направлением поворота. Построение образа выбранной точки X сводится сначала к откладыванию угла, равного углу φ, от луча OX в заданном направлении, а затем откладыванию на стороне этого угла (отличной от стороны OX) отрезка $OX' = OX$. Все эти построения ученикам давно известны.

3) Неподвижная точка у поворота одна — это центр поворота.

4) Теорема о том, что поворот является движением, — трудная. Вряд ли стоит её доказывать на уроке. Можно предложить разобрать её доказательство дома только сильным ученикам. Характеристическое свойство поворота (отличного от поворота на нулевой угол): ***движение плоскости, имеющее единственную неподвижную точку,***

является поворотом плоскости. Эта (тоже трудная) теорема не доказывается в учебнике и не применяется.

5) Движением, обратным для поворота, является поворот с тем же центром на тот же угол, но в противоположном направлении.

6) Композиции двух поворотов рассматриваются лишь в простейшем случае, когда центры их совпадают. Хорошо бы сделать для учеников понятным, что композиция двух осевых симметрий, оси которых пересекаются, является поворотом с центром в точке пересечения осей: нарисовать две пересекающиеся прямые a и b (не перпендикулярные друг другу), взять точку и последовательно её отразить от a, а затем от b; увидеть поворот выбранной точки, после чего поменять порядок симметрий и сравнить с тем, что было.

Ученикам предлагается: 1) построить образы простейших фигур при поворотах (образы отрезков, прямых, полупрямых, углов, треугольников, окружностей, квадратов); 2) построить центр поворота, переводящего заданный отрезок в другой заданный и равный первому отрезок; 3) построить пересечение и объединение фигуры (равностороннего треугольника, квадрата) и её образа при повороте вокруг центра масс на угол 45° и вычислить их площадь.

Проверить усвоение изученного материала можно, предложив следующее задание:

Найдётся ли на плоскости такой поворот фигуры M в фигуру P, если:

1) M и P — два квадрата с равными сторонами и с общим центром;

2) M и P — два сектора одного круга с равными углами;

3) M и P — два треугольника, на которые некоторый треугольник разбит своей медианой;

4) M — это фигура, заданная уравнением $y = x^2$, а P — это фигура, заданная уравнением $x = y^2$;

5) M и P получены поворотом одной и той же фигуры T вокруг одной и той же точки?

Замечание. Пункт 8.8 *Классификация движений на плоскости* предлагается учащимся самостоятельно прочитать дома.

Урок 32 (п. 8.9. *Равенство фигур и движения*)

Цель урока. Дать общее определение равенства фигур.

Определить равенство фигур как фигур, совмещающихся некоторым движением, а затем дать равносильное определение, не употребляя слово *движение*. Доказать, что определение равных треугольников как треугольников, имеющих соответственно равные стороны, равносильно данному теперь общему определению равенства.

§ 9. Симметрия фигур (4 ч)

9.1. Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур.

9.2. Фигуры, обладающие переносной симметрией.

9.3. Элементы симметрии фигур.

9.4. Симметрия правильных многоугольников, правильных пирамид и призм.

9.5. Правильные многогранники.

Урок 33 (п. 9.1. *Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур*)

Цели урока. Познакомить учеников с общим понятием симметрии и с видами симметрии фигур.

Рассказ учителя о симметричных фигурах с иллюстрациями реальных симметричных фигур. Справка о значениях слова *симметрия* и о симметрии в широком её понимании (в физике, литературе, искусстве). В геометрии слово *симметрия* имеет два значения: во-первых, более узкое — как часть названия одного из преобразований (центральная симметрия, осевая симметрия, зеркальная симметрия); во-вторых, более широкое — как существование нетождественного движения, совмещающего фигуру саму с собой (*самосовмещающего фигуру*). Например, квадрат можно самосовместить поворотами вокруг его центра на углы, кратные 90°, и четырьмя осевыми симметриями. Если фигуру можно самосовместить некоторым движением (переносом, поворотом, осевой симметрией и т. д.), то говорят, что фигура обладает *переносной симметрией, поворотной симметрией* и т. д. Например, окружность обладает бесконечным числом поворотных симметрий (вокруг своего центра) и бесконечным числом осевых симметрий (с осями, проходящими через её центр). Можно сказать и о симметриях неплоских фигур вращения — конуса, цилиндра, шара.

Урок 34 (п. 9.2. *Фигуры, обладающие переносной симметрией*)

Цели урока. Ознакомиться с фигурами, обладающими переносной симметрией и доказать их неограниченность.

Прежде всего отмечаем, что *фигуры, обладающие переносной симметрией*, — *неограниченны*, так как любая такая фигура содержит бесконечное число точек, лежащих на некоторой прямой с постоянным расстоянием между ними. Переносной симметрией обладают *бордюры и паркеты*. Ученикам предлагается нарисовать бордюры или паркеты.

Урок 35 (п. 9.3. *Элементы симметрии фигур,* п. 9.4. *Симметрия правильных многоугольников, правильных пирамид и призм*)

Цели урока. Рассмотреть симметрии правильных фигур. Ввести понятие *фигура вращения.*

Вводится понятие об *элементах симметрии фигуры* и о *фигурах вращения* (плоских и пространственных).

Подробно перечисляются элементы симметрии правильных многоугольников. Их можно составить из равных друг другу равнобедренных треугольников. Это позволяет увидеть их поворотные симметрии.

Фигура вращения определяется как фигура, самосовмещающаяся при повороте на любой угол. Рассматриваются плоские и простейшие пространственные фигуры вращения.

Урок 36 (п. 9.4. *Симметрия правильных многоугольников, правильных пирамид и призм,* п. 9.5. *Правильные многогранники*)

Цели урока. Познакомить учеников с симметрией наиболее симметричных многогранников.

Сначала ученики вспоминают, какие пирамиды и призмы называются правильными. Затем учитель говорит, что симметрия правильных пирамид и призм индуцируется (порождается) симметрией их оснований и устанавливается соответствие между планиметрическими элементами симметрии оснований правильных призм и пирамид и их стереометрическими элементами симметрии (*иллюстрация*).

Далее учитель говорит о самых симметричных многогранниках — пяти правильных многогранниках — и последовательно рассматривает на моделях их элементы симметрии.

§ 10. Подобие (4 ч)

10.1. Преобразование подобия и его простейшие свойства.
10.2. Гомотетия.
10.3. Свойства подобных фигур.
10.4. Признаки подобия треугольников.

Урок 37 (п. 10.1. Преобразование подобия и его простейшие свойства)

Цель урока. Познакомить учеников с понятием подобия и его общими свойствами.

Учитель вместе с учениками ищет примеры реальных предметов, имеющих *одинаковую форму*, но разные размеры. Такими примерами могут служить две фотографии, напечатанные с одного и того же негатива, но с разным увеличением, две пары обуви одной модели, но разных размеров, два плана (две карты) одного и того же объекта (государства), выполненные в разных масштабах, и т. п. Геометрические фигуры, соответствующие таким двум предметам, называют *подобными*, а преобразования, которые переводят одну из двух подобных фигур в другую, — *преобразованиями подобия.* При преобразованиях подобия расстояния между любыми парами соответствующих точек умножаются на одно и то же положительное число, которое называется *коэффициентом подобия* рассматриваемого преобразования. После такого разговора с учениками учитель переходит к точным формулировкам или предлагает ученикам сформулировать определения самостоятельно и уточняет их в случае необходимости. Важно подчеркнуть, что движения — преобразования фигур, которые сохраняют расстояния между точками, — являются частными случаями подобия: это подобия, с коэффициентом подобия, равным единице, а равенство фигур — это частный случай подобия фигур (с коэффициентом подобия, равным единице).

Выясняется, что: 1) подобие обратимо и произведение коэффициентов двух взаимно обратных подобий равно единице;

2) композицией двух подобий является подобие и при композиции подобий их коэффициенты перемножаются.

Среди важных примеров преобразований была гомотетия (см. п. 7.2). Вспоминается её определение и выясняется, что гомотетия является подобием с коэффициентом, равным модулю коэффициента гомотетии. Уже можно сказать, что любое подобие является композицией гомотетии и движения, а потому свойства подобия станут известны, когда будут изучены свойства гомотетии (а свойства движений нам уже известны).

Ученикам предлагаются такие задачи:

1) Определить коэффициент подобия двух заданных подобных фигур (например, двух квадратов или двух окружностей).

2) Нарисовать фигуру, подобную заданной фигуре, когда задан и коэффициент подобия.

Такую работу можно выполнить и на бумаге, и с помощью компьютера.

Проверить усвоение изученного материала можно, предложив ученикам такие задания:

1) В одном из окошек экрана компьютера размеры изображения на нём заданы процентами: 500%, 200%, 150%, 100%, 75%, 50%, 25%, 10%. Найдите коэффициенты подобия при переходе от одного изображения к другому в следующих случаях: а) от 100 к 25%; б) от 25 к 150%; в) от 150 к 50%; г) от 50 к 200%.

2) Найдите по карте расстояние между двумя объектами.

Урок 38 (п. 10.2. *Гомотетия*)

Цель урока. Изучить свойства гомотетии.

Ученики повторяют определение гомотетии и пишут основное векторное равенство

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX} \qquad (1),$$

задающее гомотетию. Затем следуют доказательства четырёх важнейших свойств. В первом из них векторной алгеброй из равенства (1) выводится равенство

$$\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY} \qquad (2).$$

Второе и четвёртое свойства иллюстрируют динамические вставки: бегущая точка пробегает отрезок и движущийся отрезок заполняет треугольник (свойство 4). Доказательство свойства 3 ведётся чисто аналитически с помощью теоремы косинусов.

Ученики решают такие задачи:

1) Рисуют отрезок, выбирают центр и коэффициент гомотетии. Им предлагается нарисовать образ первого отрезка при соответствующей гомотетии.

2) Рисуют два параллельных отрезка. Им предлагается найти центр и коэффициент гомотетии, при которой первый из отрезков переводится во второй.

Такую работу можно выполнить и на бумаге, и с помощью компьютера. При желании можно выбрать, кроме отрезков, и более сложные фигуры.

Проверить усвоение изученного материала можно, предложив такое задание:

Нарисуйте две параллельные прямые. Выберите точку, не лежащую на них. Ответьте на такие вопросы:

1) Можно ли некоторой гомотетией с центром в этой точке перевести одну из этих прямых в другую?

2) Если можно, то как найти коэффициент этой гомотетии?

Ответьте на аналогичные вопросы для двух параллельных плоскостей.

Урок 39 (п. 10.3. *Свойства подобных фигур*)

Цели урока. Доказать теорему о том, что подобие есть композиция гомотетии и движения, и как следствия этой теоремы выяснить свойства подобных фигур.

Доказывается теорема о подобии как композиции гомотетии и движения. Следствиями этой теоремы, а также свойств гомотетий и движений являются предложения о том, что *подобие отрезок переводит в отрезок* (свойство 1), что *подобие сохраняет величины углов* (свойство 2), что *у подобных треугольников стороны пропорциональны, а соответственные углы равны* (свойство 3), что *при подобии с коэффициентом k площади многоугольников умножаются на k^2, а объёмы многогранников — на k^3* (свойства 4 и 5).

Интересно на экранах компьютеров (или хотя бы на снимках) показать множества Жулио и рассказать о фрактальной геометрии.

Урок 40 (п. 10.4. *Признаки подобия треугольников*)

Цель урока. Изучить признаки подобия треугольников.

Если в 8 классе уже изучались признаки подобия треугольников, то их повторяют и переходят к решению задач. Если же эта тема не изучалась, то доказывают три признака: 1) по пропорциональности трёх сторон; 2) по равенству соответственных углов; 3) по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними. Доказательство первого из них состоит в том, что сначала гомотетией стороны первого треугольника делают равными сторонам второго, а затем совмещают эти треугольники движением. Второй и третий признаки аналитически сводятся к первому с помощью теорем синусов и косинусов. Признаки подобия треугольников сравнивают с признаками их равенства.

Проверить изученный материал можно, задав учащимся такие вопросы:

1) Каждый ли из признаков подобия треугольников имеет своим частным случаем признак равенства треугольников?

2) Верно ли утверждение, что два равнобедренных треугольника, имеющих по равному углу, равны? Если оно неверно, то как его уточнить, чтобы оно стало верным?

3) Какие признаки подобия прямоугольных треугольников можно получить как следствия общих признаков подобия треугольников?

Уроки 41—42 (*Решение задач по главе II «Преобразования»*)

Урок. 43 (*Контрольная работа № 2 по главе II «Преобразования»*)

Вариант 1

1. $ABCD$ — параллелограмм, $AD = 8$, $BD = 14$. Точка M лежит на стороне BC и $CM = 6$. Найдите BK и DK, где K — точка пересечения AM и BD.

2. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетом $BC = 6$ и прямым углом C повернули на 90° по часовой стрелке вокруг вершины A и получили треугольник AB_1C_1 (точка B_1 — образ точки B). Найдите CB_1 и CC_1.

3. В треугольнике ABC сторона $AB = 10$ и сторона $AC = 12$. На стороне AB взята точка K и $AK = 6$, а на стороне AC взята точка P и $AP = 5$. а) Докажите, что $\angle AKP = \angle ACB$. б) Какую часть площади треугольника ABC занимает четырёхугольник $PKBC$?

4. Постройте произвольный выпуклый пятиугольник P и любые две его диагонали. Пусть эти диагонали пересекаются в точке O. Постройте образ пятиугольника P при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом 2.

Решения

1. Треугольники ADK и MBK подобны и $AD : MB = 8 : 2 = 4$. $DK : KB = 4$ и $DK + KB = 14$. Поэтому $KB = 2{,}8$, а $DK = 11{,}2$.

2. В треугольнике CAB_1 угол A равен 45°, $AC = 6$ и $AB_1 = 6\sqrt{2}$. Поэтому по теореме косинусов $CB_1{}^2 = 36 + 72 - 72 = 36$ и $CB_1 = 6$. ACB_1C_1 — квадрат со стороной 6, а потому $CC_1 = 6\sqrt{2}$.

3. Треугольники ABC и APK подобны с коэффициентом подобия 2. Поэтому площадь треугольника APK равна $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC, а площадь четырёхугольника $PKBC$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника ABC.

Вариант 2

1. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, точка M — середина основания AD, $BC = 5$, $AC = 10$. Отрезки AC и BM пересекаются в точке K и $AK = 6$. Найдите AD.

2. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетом $AC = 4$ и прямым углом C повернули на $90°$ против часовой стрелки вокруг вершины B и получили треугольник A_1BC_1 (точка A_1 — образ точки A). Найдите AA_1 и CA_1.

3. В треугольнике ABC сторона $BA = 15$ и сторона $BC = 21$. На стороне BA взята точка M и $BM = 7$, а на стороне BC взята точка K и $BK = 5$. а) Докажите, что $\angle BKM = \angle BAC$. б) Какую часть площади треугольника ABC занимает четырёхугольник $AMKC$?

4. Постройте произвольный выпуклый четырёхугольник P и две его диагонали. Пусть эти диагонали пересекаются в точке O. Постройте образ четырёхугольника P при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом 2.

Решения

1. $CK = 10 - 6 = 4$. Треугольники AKM и CKB подобны и $AK : CK = 6 : 4$. Поэтому $AM : CB = 6 : 4$ и $AM = 7{,}5$. $AD = 2AM = 15$.

2. Точка C — середина отрезка AA_1. Поэтому $AA_1 = 2AC = 8$, $CA_1 = 4$.

3. Треугольники BAC и BMK подобны с коэффициентом подобия 3. Поэтому площадь треугольника BMK равна $\frac{1}{9}$ площади треугольника ABC, а площадь четырёхугольника $AMKC$ составляет $\frac{8}{9}$ площади треугольника ABC.

Глава III. Геометрия круга
(20 ч, контрольная работа № 3)

§ 11. Хорды, касательные, секущие. (11.1. Свойства хорд. 11.2. Касание прямой и окружности. Взаимное расположение прямой и окружности. 11.3. Градусная мера дуги окружности. 11.4. Измерение вписанных углов. 11.5. Произведения отрезков хорд и секущих. 11.6. Взаимное расположение двух окружностей.)

§ 12. Вписанные и описанные окружности. (12.1. Окружность, описанная вокруг многоугольника. 12.2. Окружность, вписанная в многоугольник. 12.3. Замечательные точки треугольника. Окружность Эйлера.)

§ 13. Длина окружности и площадь круга. (13.1. Измерение длины кривой. Длина окружности. 13.2. Длина дуги окружности. 13.3. Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга. 13.4. Число π. 13.5. Архимед.)

Задачи к главе III.

Общие методические рекомендации к главе III «Геометрия круга»

Основная задача главы III — вывод формул для измерения длины окружности и площади круга (§ 13 — последний параграф главы). Представление о том, что длина окружности пропорциональна её радиусу, а площадь круга — квадрату его радиуса, важно в общекультурном плане, а то поэты (они ведь, несомненно, полагают себя культурными людьми) пишут, а издатели (тоже люди культурные) печатают такие строки: «Площадь круга, площадь круга два пи эр…», которые показывают, какая путаница в некоторых головах относительно площади круга и длины окружности. Вывод этих формул опирается на приближение (аппроксимацию) окружности и круга вписанными в них или описанными вокруг них многоугольниками. Поэтому многие из пунктов этой темы связаны именно с такими многоугольниками, а также с рядом классических задач, касающихся вписанных и описанных многоугольников, замечательных точек треугольника и т. п. В общекультурном плане эти вопросы имеют второстепенный характер, но рассмотрение их позволяет хорошо повторить все важнейшие теоремы о треугольниках, что полезно в конце курса геометрии основной школы. Метод изучения материала этих вопросов — классический синтетический метод элементарной геометрии.

§ 11. Хорды, касательные и секущие (8 ч)

11.1. Свойства хорд.

11.2. Касание прямой и окружности. Взаимное расположение прямой и окружности.

11.3. Градусная мера дуги окружности.

11.4. Измерение вписанных углов.

11.5. Произведения отрезков хорд и секущих.

11.6. Взаимное расположение двух окружностей.

Урок 44 (п. 11.1. *Свойства хорд*)

Цели урока. Вспомнить теоремы о равнобедренных треугольниках и изучить опирающиеся на них свойства хорд окружности.

Материал этого пункта вполне традиционен, и он мог бы быть изучен и в 7 классе. Перечисленные свойства хорд окружностей уже не раз появлялись в задачном материале. В каждом из них оборотом *тогда и только тогда* объединены два взаимно обратных утверждения. Стоит вспомнить, как связаны взаимно обратные утверждения, и для каждого свойства сформулировать соответствующую пару утверждений. Их доказательства опираются на хорошо знакомые ученикам теоремы о равнобедренном треугольнике, которые можно повторить. Но можно применить для доказательств и движения: в свойстве 1 — осевую симметрию, в свойствах 2 и 3 — поворот вокруг центра окружности. Из трёх пар взаимно обратных утверждений учитель доказывает одно, а второе ученики доказывают самостоятельно. После этого решают задачу 11.1.

Проверяя усвоение изученного материала, можно задать ученикам такие вопросы:

1) Какой угол называется центральным углом окружности?

2) Как проходит серединный перпендикуляр хорды окружности?

3) Где расположены середины хорд данной окружности радиуса r, имеющих длину a?

4) Где расположены центры окружностей радиуса r, высекающих на данной прямой хорды длины a?

Урок 45 (п. 11.2. *Касание прямой и окружности*)

Цели урока. Ввести понятие о касании прямой и окружности и доказать характерное свойство касательной к окружности.

Определив касающиеся прямую и окружность наличием у них единственной общей точки, стоит после этого сказать, что о касании говорят и для других линий (кривых), что наличие единственной общей точки характерно для касания прямой и окружности, а для прямой и параболы такое определение уже не годится и что в общем случае касание определяется по-другому (это будет сделано в старших классах). Из двух утверждений теоремы о касательной к окружности учитель доказывает первое (более трудное), а второе ученики доказывают самостоятельно. Вместе с учителем ученики решают задачу о построении касательной (задача 11.12).

Проверяя усвоение изученного материала, можно задать ученикам следующие вопросы:

1) Какую прямую называют касательной к окружности?

2) В чём состоит свойство прямой, касательной к окружности?

3) В чём состоит признак касания прямой и окружности?

4) Где лежат центры окружностей, касающихся данной прямой в заданной точке?

Урок 46 (п. 11.2. *Взаимное расположение прямой и окружности*)

Цели урока. Ввести (или напомнить) понятие о расстоянии между двумя фигурами и, используя это понятие, дать классификацию взаимного расположения прямой и окружности.

В начале урока повторяется (или вводится, если его не рассматривали в 7 классе) важное в практике понятие расстояния между фигурами (в задаче 11.14) и оно обсуждается для простейших фигур: точка и прямая, точка и плоскость, параллельные прямые, параллельные плоскости. Затем даётся классификация взаимного расположения прямой и окружности (в зависимости от расстояния от центра окружности до прямой).

Проверить усвоение изученного материала можно, попросив учеников ответить на следующие вопросы:

1) От чего зависит взаимное расположение прямой и окружности?

2) Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность?

3) Где расположены центры окружностей, имеющие своей хордой данный отрезок?

4) Где расположены центры окружностей, отсекающие на двух заданных параллельных прямых равные отрезки?

5) Где расположены центры окружностей, отсекающие на сторонах заданного угла равные отрезки?

Урок 47 (п. 11.3. *Градусная мера дуги окружности*)

Цель урока. Ввести понятие градусной меры дуги окружности.

О градусном измерении дуг окружностей ученики уже знают из географии. Равенство дуг одной и той же окружности можно проиллюстрировать её вращением.

Урок 48 (п. 11.4. *Измерение вписанных углов*)

Цель урока. Доказать теорему о измерении вписанного угла.

Доказательство теоремы о вписанном угле учитель проводит для первых двух случаев, а третий случай ученики доказывают самостоятельно.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Что называется вписанным углом?

2) Чем измеряется вписанный угол?

3) Где расположены вершины углов, из которых данный отрезок виден под данным углом?

4) Где расположены вершины всевозможных прямоугольных треугольников, имеющих одну и ту же гипотенузу? На этот вопрос дайте ответ для плоскости и для пространства.

Уроки 49 и 50 (п. 11.5. *Произведения отрезков хорд и секущих*)

Цель уроков. Доказать три теоремы о метрических свойствах окружности.

Три теоремы геометрии окружности (о произведении отрезков хорд, отрезков секущих и о квадрате касательной) — материал второстепенный. Линия метрических свойств окружности в Федеральных государственных образовательных стандартах для основной школы имеет незавершённый характер и не доведена до основного понятия этой линии — понятия степени точки относительно окружности. Сами по себе эти теоремы интересны, а их доказательства дают хорошую возможность повторить признаки и свойства подобия треугольников. Учителю вместе с классом можно доказать две первые теоремы, а теорему о квадрате касательной дать для самостоятельной работы ученикам.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Какое свойство вписанных углов используется при доказательстве теорем в данном пункте?

2) Какой признак подобия треугольников используется при доказательстве теорем в этом пункте?

3) Какое свойство подобных треугольников используется при доказательстве теорем в этом пункте?

4) Что общего в формулировках и доказательствах теорем о произведении отрезков хорд и о произведении отрезков секущих?

Урок 51 (п. 11.6. *Взаимное расположение двух окружностей*)

Цель урока. Дать в динамике классификацию взаимного расположения двух окружностей.

Классификация взаимного расположения двух окружностей существенно различается в зависимости от того, различны ли радиусы окружностей (общий случай), или эти радиусы равны (частный случай). Учитель разбирает общий случай, а для самостоятельной работы оставляет для ученика частный случай. Материал урока можно изучить на наглядном уровне. Классификацию стоит осуществить динамично, начав со случая, когда расстояние между центрами окружностей больше суммы их радиусов, а затем уменьшать расстояние между центрами до случая их совпадения — концентрические окружности. Особо выделяется случай касания окружностей. Общие точки двух окружностей можно найти, записав в координатах их уравнения и решив систему этих уравнений.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Каковы соотношения между радиусами окружностей и расстоянием между их центрами в случаях, когда окружности касаются?

2) Каковы соотношения между радиусами окружностей и расстоянием между их центрами в случаях, когда окружности пересекаются?

3) Каковы соотношения между радиусами окружностей и расстоянием между их центрами в случаях, когда окружности не имеют общих точек?

4) Одна окружность катится по другой. По какой линии движется её центр?

5) На сколько частей могут разбить плоскость две окружности?

§ 12. Вписанные и описанные окружности (5 ч)

12.1. Окружность, описанная вокруг многоугольника.

12.2. Окружность, вписанная в многоугольник.

12.3. Замечательные точки треугольника. Окружность Эйлера.

Урок 52 (п. 12.1. *Окружность, описанная вокруг многоугольника*)

Цели урока. Ввести понятие описанной окружности и доказать теорему об окружности, описанной вокруг треугольника.

Говорят как об окружности, описанной *вокруг* многоугольника, так и об окружности, описанной *около* многоугольника. Поскольку слово *около* имеет также смысл *рядом*, то мы предпочитаем говорить *вокруг*. С идеей равноудалённости — основной в этом пункте — ученики уже знакомы: серединные перпендикуляры известны им с 7 класса. Именно работа с ними даёт как доказательство теоремы об окружности, описанной вокруг треугольника, так и построения примеров четырёхугольников, вокруг которых нельзя описать окружность.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Как искать центр окружности, описанной вокруг многоугольника? Всегда ли он найдётся?

2) У каких треугольников центр описанной окружности лежит: а) внутри треугольника; б) на стороне треугольника; в) вне треугольника?

Урок 53 (п. 12.1. *Окружность, описанная вокруг многоугольника*)

Цель урока. Вывести формулу для вычисления радиуса окружности, описанной вокруг треугольника.

Вычисление радиуса окружности, описанной вокруг треугольника, позволяет вспомнить теорему синусов и расширить её содержание.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Какие вам известны формулы для вычисления радиуса окружности, описанной вокруг треугольника?

2) Как, зная стороны треугольника, найти радиус описанной вокруг него окружности?

Урок 54 (п. 12.2. *Окружность, вписанная в многоугольник*)

Цели урока. Ввести понятие вписанной окружности и доказать теорему об окружности, вписанной в треугольник.

После того как вписанная в многоугольник окружность определяется как окружность, касающаяся всех сторон многоугольника, хотелось бы найти её центр как точку, *равноудалённую* от всех сторон многоугольника. Но такой подход опровергается примером невыпуклого четырёхугольника: центр окружности, проходящей через вершину невыпуклого угла четырёхугольника и касающейся двух противолежащих ей сторон четырёхугольника, равноудалён от всех сторон четырёхугольника, но у него нет вписанной окружности. Поэтому центр окружности, вписанной в многоугольник, должен быть общей точкой биссектрис всех углов многоугольника, и если такая точка существует, то многоугольник имеет вписанную окружность, а если такой точки нет, то нет и вписанного многоугольника.

У каждого треугольника биссектрисы его углов имеют общую точку, и у любого треугольника есть вписанная в него окружность. Её радиус r легко найти, зная периметр и площадь треугольника, из формулы $S = pr$. Эта формула верна и для любого многоугольника, имеющего вписанную окружность.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Что значит «окружность вписана в многоугольник»?
2) Как искать центр окружности, вписанной в многоугольник? Всегда ли он найдётся?
3) У каких треугольников центры описанной и вписанной окружностей совпадают?
4) Какая вам известна формула для вычисления радиуса окружности, вписанной в многоугольник?
5) Как, зная стороны треугольника, найти радиус вписанной в него окружности?

Урок 55 (п. 12.3. *Замечательные точки треугольника*)

Цель урока. Доказать теорему о точке пересечения медиан треугольника.

Учитель доказывает теорему о точке пересечения медиан треугольника и рассказывает о её механическом смысле и о доказательстве этой теоремы Архимедом (об этом написано в п. 10.6 учебника «Геометрия, 8» тех же авторов).

Проверить усвоение изученного материала можно, задав следующие вопросы:

1) Где лежит центр масс (центр тяжести) треугольника?
2) В треугольнике совпали центр масс и центр вписанной окружности. Какой это треугольник?
3) В треугольнике совпали центр масс и центр описанной окружности. Какой это треугольник?

Урок 56 (п. 12.3. *Замечательные точки треугольника. Окружность Эйлера*)

Цель урока. Познакомить учеников с ортоцентром треугольника.

Теорема об ортоцентре треугольника легко сводится к теореме об окружности, описанной вокруг подобного ему треугольника. Ученики разбирают решение задачи 12.21 о прямой Эйлера.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Какую точку называют ортоцентром треугольника?
2) Где лежит ортоцентр прямоугольного треугольника?
3) Где лежит ортоцентр остроугольного треугольника?
4) Где лежит ортоцентр тупоугольного треугольника?
5) В треугольнике совпали ортоцентр и центр вписанной окружности. Какой это треугольник?
6) В треугольнике совпали ортоцентр и центр описанной окружности. Какой это треугольник?
7) В треугольнике совпали ортоцентр и центр масс. Какой это треугольник?

§ 13. Длина окружности и площадь круга (6 ч)

13.1. Измерение длины кривой. Длина окружности.

13.2. Длина дуги окружности.

13.3. Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга.

13.4. Число π.

Урок 57 (п. 13.1. *Измерение длины кривой. Длина окружности*)

Цели урока. Ввести понятие об измерении длины кривой и доказать, что длина окружности пропорциональна её радиусу (диаметру).

Начать урок следует с рассказа об измерении длин реальных путей посредством вписывания в них ломаных, а затем уже сказать об измерении длины окружности с помощью правильных многоугольников, вписанных в неё. Затем доказать теорему о пропорциональности длины окружности её радиусу (диаметру) и ввести число π. Решать вопросы лишь об *измерении* (*вычислении*) длин кривых, а не об *определении* понятия длины кривой, полагая, что такая длина существует и интуитивное понятие о ней ученики имеют.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Как измеряют длину криволинейной линии?
2) Как измеряют длину окружности?
3) Как вводится число π?
4) По какой формуле вычисляется длина окружности?

Урок 58 (п. 13.2. *Длина дуги окружности*)

Цель урока. Вывод формулы для измерения длины дуги окружности.

На уроке также решаются задачи с применением данной формулы.

Урок 59 (п. 13.3. *Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга*)

Цели урока. Дать понятие об измерении площадей фигур с криволинейными границами и вывести формулу для измерения площади круга.

Начать урок следует с рассказа об измерении площадей плоских фигур посредством приближения их многоугольниками, а затем уже сказать об измерении площади круга с помощью правильных многоугольников, описанных вокруг них, и доказать теорему о пропорциональности площади круга квадрату его радиуса. Решать вопросы нужно лишь об *измерении* (*вычислении*) площадей, а не об *определении* понятия площади, полагая что площадь существует и интуитивное понятие о ней ученики имеют.

Проверить усвоение изученного материала можно, задав ученикам следующие вопросы:

1) Как измеряют площадь плоской фигуры с криволинейной границей?
2) Как измеряют площадь круга?
3) Какова зависимость площади круга от его радиуса?
4) По какой формуле вычисляют площадь круга?
5) По какой формуле вычисляют площадь сектора круга?

Урок 60 (п. 13.3. *Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга*)

Цель урока. Вывести формулу для вычисления площади сектора круга.

На уроке также решаются задачи с применением данной формулы.

§ 14. Цилиндр и конус. Сфера и шар

14.1. Цилиндры и конусы

14.2. Объёмы цилиндра и конуса

14.3. Сфера и шар. Объём шара. Площадь сферы

14.4. Архимед

В этом параграфе мы завершаем предварительное ознакомление с важнейшими геометрическими фигурами в пространстве, которое мы вели в течение всего трёхлетнего систематического курса геометрии.

Урок 61 (пп. 14.1 и 14.2. *Цилиндры и конусы. Объёмы цилиндра и конуса*)

Цель урока. Дать определения важнейших понятий, связанных с цилиндром и конусом (основания, образующие, развертки и т. д.) и вывести формулы для вычисления площадей их поверхностей и объёмов.

Урок 62 (п. 14.3. *Сфера и шар. Объём шара. Площадь сферы*

Цель урока. Напомнить определения основных понятий, связанных со сферой и шаром (они уже были в пп. 2.5 и 2.6 в Геометрии 7) и ознакомить с формулами объёма шара и площади его поверхности, а также с историей их доказательства Архимедом.

Урок 63 (пп. 13.4 и 14.4. *Число* π. *Архимед*)

Цель урока. Ознакомить учеников с историей, связанной с числом π, с работами Архимеда и его ролью в науке.

Урок 64 (*Решение задач по главе III «Геометрия круга»*)

Можно рассмотреть ещё раз решение задач 11.44 и 11.43, которые используются при решении задач контрольной работы № 3.

Урок 65 (*Контрольная работа № 3 по главе III «Геометрия круга»*)

Вариант 1

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите длину окружности, описанной вокруг этого треугольника, и площадь круга, вписанного в этот треугольник.

2. Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 24. Найдите площадь правильного треугольника, описанного вокруг этой окружности.

3. Расстояние от точки M вне круга радиуса 7 до его центра равно 9. Секущая этого круга из точки M пересекает его по хорде AB (B лежит на MA). Найдите длину хорды AB, если $AB = BM$.

Решения

1. Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, т. е. равен 5. Её длина равна 10π. Полупериметр треугольника равен 12, а его площадь равна 24. Поэтому радиус вписанного круга равен 2, а его площадь равна 4π.

2. Радиус окружности равен $3\sqrt{2}$. Длина стороны описанного правильного треугольника равна $6\sqrt{6}$. Его площадь равна $54\sqrt{3}$.

3. Положим $AB = x$. Тогда $MA = 2x$ и $MA \cdot MB = 2x^2$. Так как $MA \cdot MB = 81 - 49$ (см. задачу 11.44), то $x = 4$.

Вариант 2

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите длину окружности, вписанной в этот треугольник, и площадь круга, описанного вокруг этого треугольника.

2. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 54. Найдите площадь квадрата, вписанного в эту же окружность.

3. Расстояние от точки M внутри круга радиуса 9 до его центра равно 7. Хорда AB этого круга проходит через точку M. Найдите длину хорды AB, если $AM : MB = 2$.

Решения

1. Площадь треугольника равна 30, гипотенуза равна 13, а его полупериметр равен 15. Поэтому радиус вписанной окружности равен 2 и её длина равна 4π, а радиус описанного круга равен 6,5 и его площадь равна $42{,}25\,\pi$.

2. Радиус окружности равен $6\sqrt{3}$. Длина стороны вписанного в неё квадрата равна $6\sqrt{6}$. Его площадь равна 216.

3. Положим $MB = x$. Тогда $MA \cdot MB = 2x^2$ и $2x^2 = 81 - 49$ (см. задачу 11.43). Тогда $x = 4$ и $AB = 12$.

Итоговое повторение (5 ч)

На последних уроках следует кратко повторить важнейший материал курса геометрии основной школы. При этом не обязательно наличие учебников для 7 и 8 классов, так как здесь мы напомним главные результаты курса геометрии основной школы. Повторение основных результатов курса геометрии основной школы можно провести, используя предлагаемые ниже рисунки с теоретическим и задачным материалом. В нумерации задач применяем букву П (повторение).

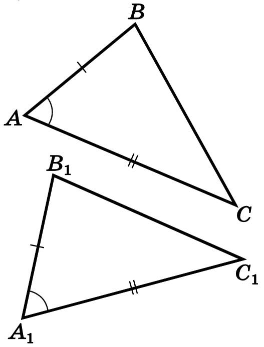
Урок 66. Первые теоремы о треугольниках

Цель урока. Повторить теоремы о треугольниках курса 7 класса.

Равенство треугольников в разных школьных учебниках определяется различно. Но при любом определении равенства треугольников доказаны следующие два признака:

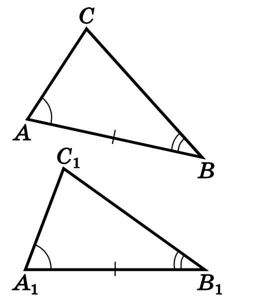
Теорема 1 (*первый признак равенства треугольников*). ***Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны*** (рис. 1).

Теорема 2 (*второй признак равенства треугольников*). ***Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны*** (рис. 2).



Если $\angle A = \angle A_1$,
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 1



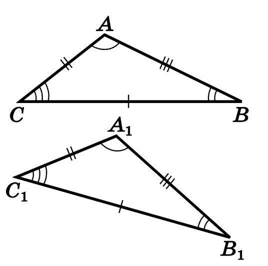
Если $AB = A_1B_1$,
$\angle A = \angle A_1$ ***и*** $\angle B = \angle B_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 2

О равенстве треугольников можно судить и по равенству их сторон: ***если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

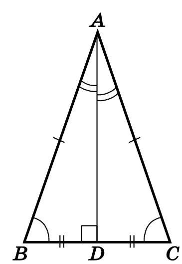
Естественно, что ***у равных треугольников соответственные углы равны*** (рис. 3).

Важные утверждения о свойствах равнобедренного треугольника объединяем в одной теореме (рис. 4):



Если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$,
то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
$\angle C = \angle C_1$

Рис. 3



а) Если $AB = AC$,
то $\angle B = \angle C$
б) Если $AB = AC$
и $BD = DC$,
то: 1) $\angle BAD = \angle CAD$;
2) $AD \perp BC$

Рис. 4

Теорема 3 (*о свойствах равнобедренного треугольника*). ***В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, проведённая к его основанию, является биссектрисой и высотой***.

Используя теорему 3, легко установить *характерное свойство точек серединного перпендикуляра*: ***точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на его серединном перпендикуляре***.

Напомним, что **характерным свойством** некоторой фигуры называется такое её свойство, которое является также признаком этой фигуры. Словесный оборот *тогда и только тогда* употребляют, объединяя в одном утверждении два **взаимно обратных утверждения.** Например, в предложении о характерном свойстве точек серединного перпендикуляра объединены два следующих взаимно обратных предложения:

Свойство точек серединного перпендикуляра. ***Если точка принадлежит серединному перпендикуляру отрезка, то она равноудалена от его концов*** (рис. 5).

Признак точек серединного перпендикуляра. ***Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка***.

Условие и заключение теоремы, связанные оборотом *тогда и только тогда,* равноправны, или, как говорят в математике, **равносильны.**

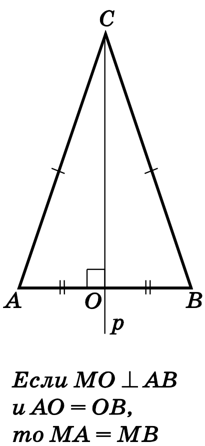


Рис. 5

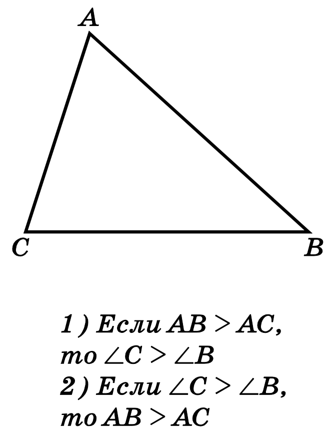


Рис. 6

Два взаимно обратных утверждения содержатся в следующей теореме:

Теорема 4 (*о сравнении сторон и углов треугольника*). ***В треугольнике*: 1)** ***против большей стороны лежит больший угол*** и, наоборот, **2)** ***против большего угла лежит большая сторона*** (рис. 6).

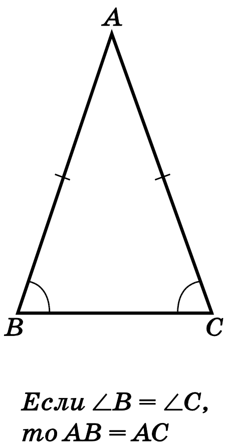


Рис. 7

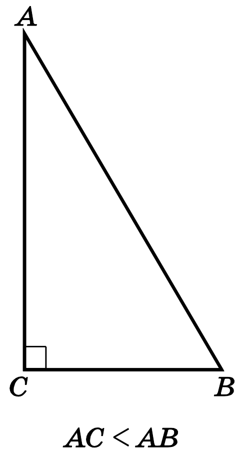


Рис. 8

Следствием этой теоремы является *признак равнобедренного треугольника*: ***если два угла треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный*** (рис. 7).

Тем самым равенство двух углов треугольника является характерным свойством равнобедренного треугольника.

Ещё одно следствие теоремы 6: ***катет короче гипотенузы*** (рис. 8).

Завершается серия теорем о сравнении сторон и углов треугольника *неравенством треугольника*: ***сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.***

Отметим, что все перечисленные теоремы не опираются на аксиому параллельности или какой-либо её эквивалент (например, на аксиому прямоугольника).

Задачи

Задачный материал при повторении удобно предлагать на рисунках.

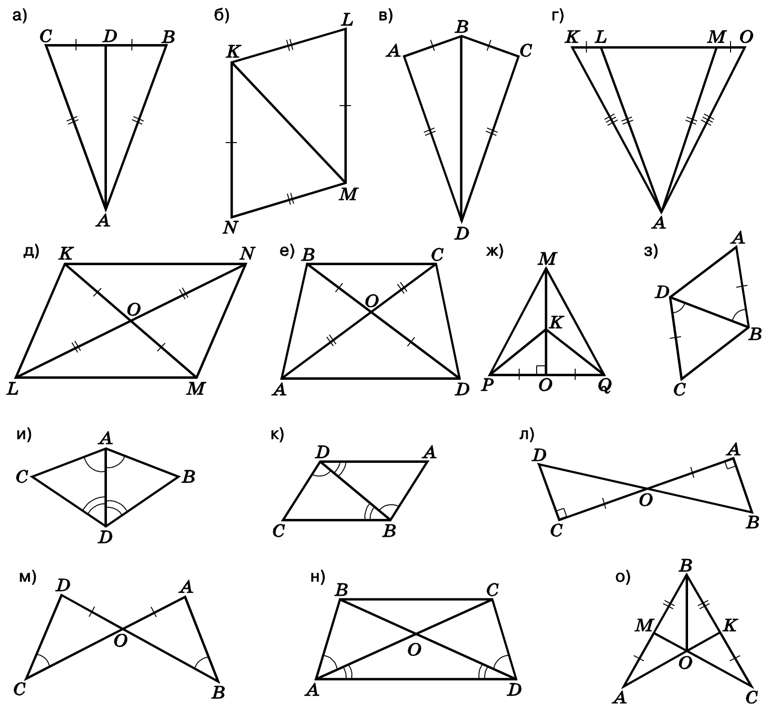


Рис. 9

Смотрим. **П.1.** На рисунке 9 укажите равные друг другу треугольники.
П.2. На рисунке 10 найдите равные друг другу углы.

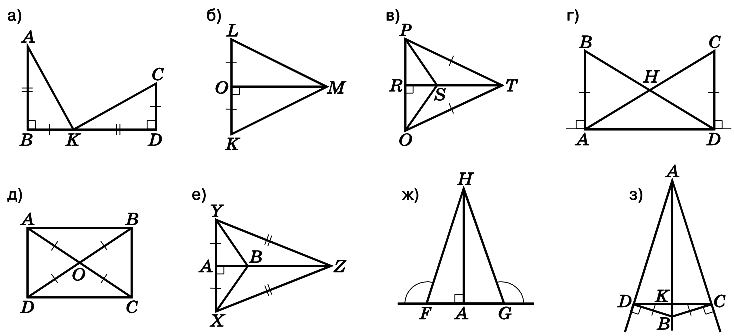


Рис. 10

П.3. На рисунке 11 укажите равнобедренные треугольники. Какие из них являются равносторонними? На рисунке из пункта ж) изображён куб.

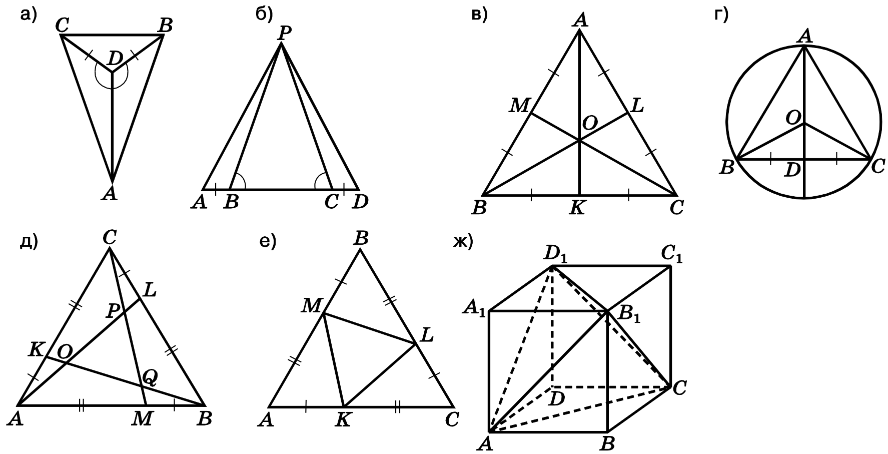


Рис. 11

Доказываем. **П.4.** В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является его медианой и высотой. Докажите.

П.5. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является его медианой и биссектрисой. Докажите.

П.6. Треугольник является равнобедренным, если в нём совпадают: а) высота и медиана; б) высота и биссектриса. Докажите.

Урок 67. Параллельность и сумма углов треугольника

Цели урока. Повторить основные предложения о параллельности прямых, теорему о сумме углов треугольника и теоремы о параллелограмме.

Напомним, что две прямые называются **параллельными,** если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 12).

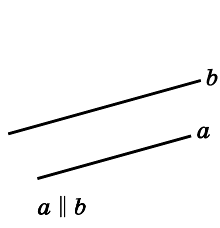


Рис. 12

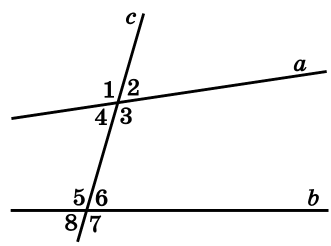
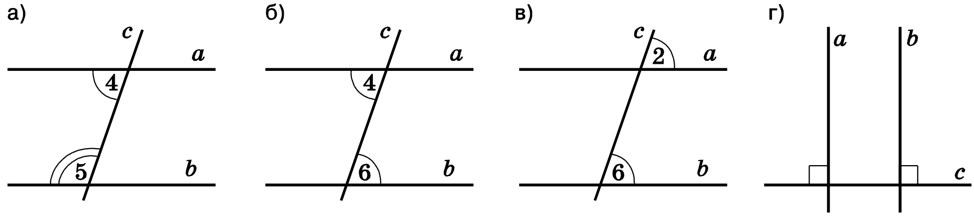


Рис. 13

Параллельность двух прямых распознают по углам, которые они образуют с пересекающей их третьей прямой (рис. 13). Напомним, как называются пары этих углов.

Две пары углов 4, 5 и 3, 6 называются **внутренними односторонними**, две пары углов 3, 5 и 4, 6 — **внутренними накрест лежащими,** а четыре пары углов 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 — **соответственными.**

Из теоремы о том, что внешний угол треугольника больше не смежного с ним угла треугольника, вытекают следующие *признаки параллельности прямых*:



Если $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$***, то*** $a \parallel b$ ***Если*** $\angle 4 = \angle 6$***, то*** $a \parallel b$ ***Если*** $\angle 2 = \angle 6$***, то*** $a \parallel b$ ***Если*** $a \perp c$ ***и*** $b \perp c$***, то*** $a \parallel b$

Рис. 14

1) ***Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c окажется, что сумма двух внутренних односторонних углов равна* 180°*, то прямые a и b параллельны*** (рис. 14, *а*).

2) ***Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c окажется, что накрест лежащие углы равны, то прямые a и b параллельны*** (рис. 14, *б*).

3) ***Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c окажется, что соответственные углы равны, то прямые a и b параллельны*** (рис. 14, *в*).

Частным случаем каждого из этих трёх признаков параллельности является утверждение о *параллельности перпендикуляров на плоскости*: ***на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны*** (рис. 14, *г*).

Эти признаки позволяют через данную точку A, не лежащую на прямой a, провести прямую b, параллельную прямой A (рис. 15).

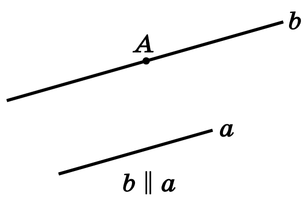


Рис. 15

Доказать *единственность* такой прямой нельзя без аксиомы параллельности (или какого-либо её эквивалента). Напомним эту аксиому.

Аксиома параллельности. ***Через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит лишь одна прямая, параллельная данной прямой.***

Аксиома параллельности даёт возможность доказать утверждения, обратные признакам параллельности прямых. В них говорится о *свойствах углов, образованных параллельными и секущей*:

Свойство 1. ***Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то сумма образованных ими внутренних односторонних углов равна*** **180°** (рис. 16, *а*).

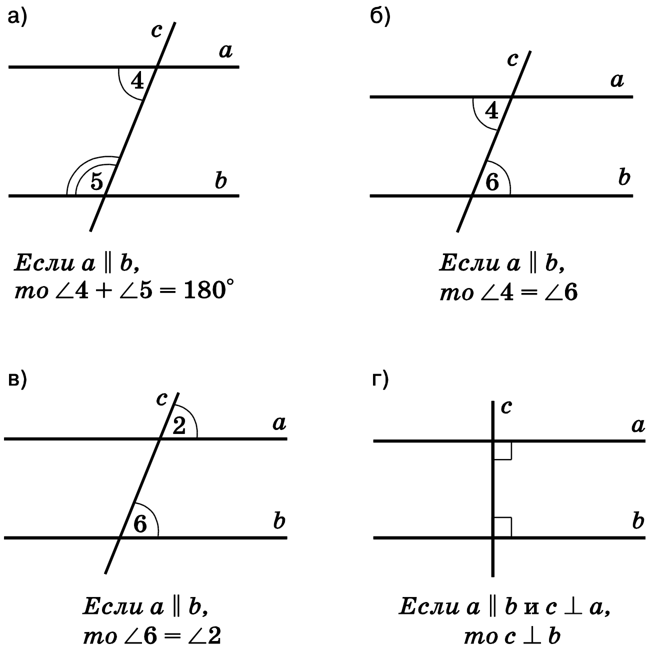


Рис. 16

Свойство 2. ***Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими внутренние накрест лежащие углы равны*** (рис. 16, *б*).

Свойство 3. ***Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими соответственные углы равны*** (рис. 16, *в*).

Частным случаем каждого из этих свойств является следующее утверждение: ***прямая, пересекающая параллельные прямые и перпендикулярная одной из них, перпендикулярна и другой из них*** (рис. 16, *г*).

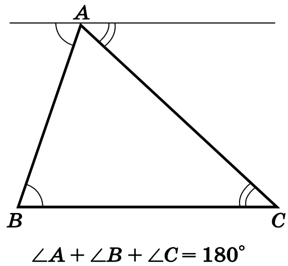


Рис. 17

Используя свойство 2 (рис. 17), легко доказываем важнейшую теорему:

Теорема 5 (*о сумме углов треугольника*). ***Сумма углов треугольника равна* 180°**.

Отметим несколько важных следствий этой теоремы:

***Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна* 90°**.

Внешний угол треугольника равен сумме не смежных с ним углов треугольника.

***Сумма углов четырёхугольника равна* 360°.**

Признак прямоугольника. Четырёхугольник, у которого три прямых угла, является прямоугольником.

Четырёхугольник, у которого одна пара параллельных сторон, называется **трапецией**, а четырёхугольник, у которого две пары параллельных сторон, называется **параллелограммом**.

Теорема 6 (*о свойствах параллелограмма*). ***Параллелограмм обладает следующими свойствами*: 1) *диагональ разбивает параллелограмм на равные треугольники*** (рис. 18, *а*); **2) *противоположные стороны параллелограмма равны*** (рис. 18, *б*); **3) *противоположные углы параллелограмма равны*** (рис. 18, *в*); **4) *точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам*** (рис. 18, *г*).

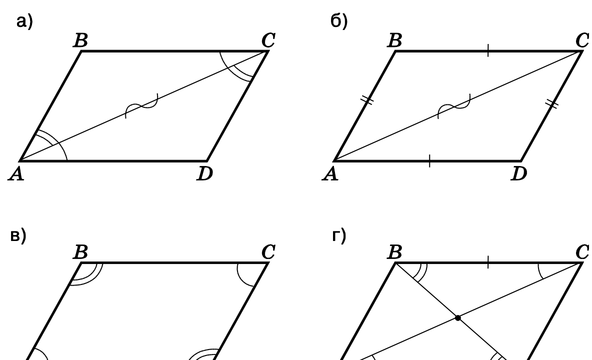


Рис. 18

Доказательства этих свойств вы легко вспомните, глядя на рисунок 18.

Напомним также *признаки параллелограмма*:

1) ***Четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно равны, является параллелограммом*** (рис. 19, *а*).

2) ***Четырёхугольник, противоположные углы которого попарно равны, является параллелограммом*** (рис. 19, *б*).

3) ***Четырёхугольник, в котором диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, является параллелограммом*** (рис. 19, *в*).

4) ***Четырёхугольник, в котором две противоположные стороны равны и параллельны, является параллелограммом*** (рис. 19, *г*).

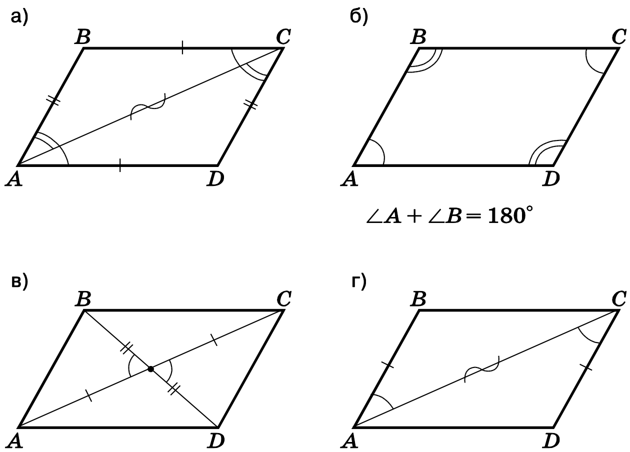


Рис. 19

Используя рисунок 19, проведите доказательства этих признаков.

Задачи

***Смотрим*. П.7.** На рисунке 20 укажите параллельные прямые.

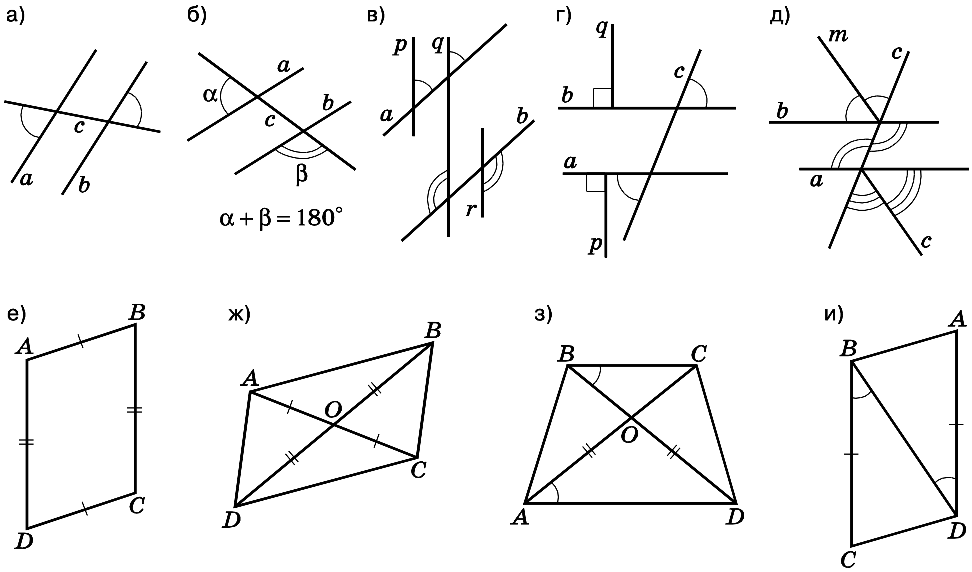


Рис. 20

П.8. На рисунке 21 прямые *a* и *b* параллельны. Найдите величины углов, отмеченных цифрами на этом рисунке.

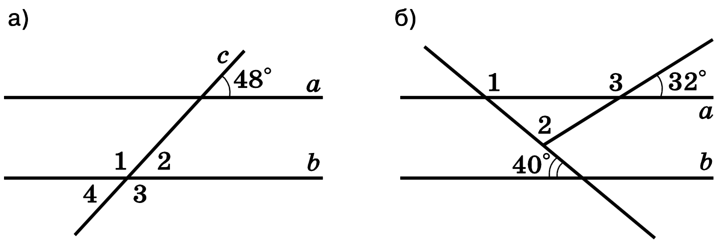


Рис. 21

П.9. Вычислите величины углов, обозначенных буквой x на рисунке 22.

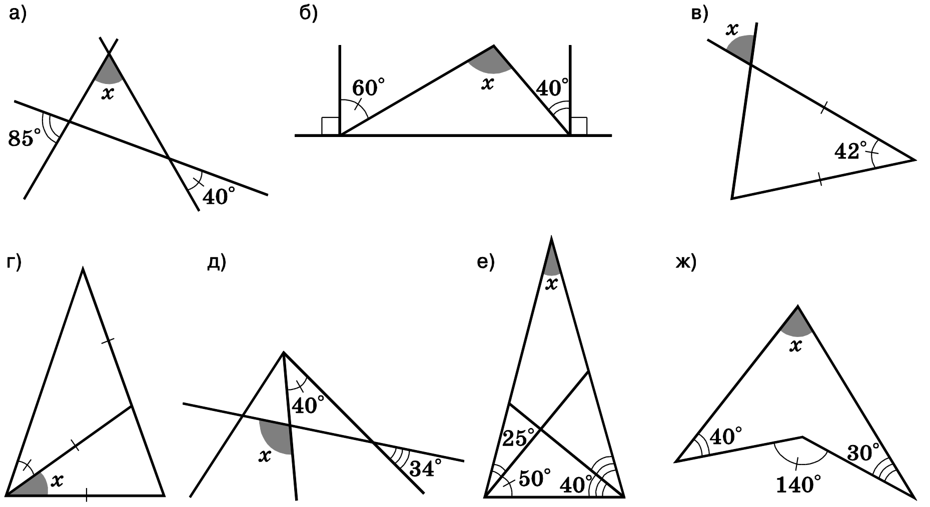


Рис. 22

П.10. На рисунке 23 обозначены некоторые элементы параллелограмма. Какие ещё величины можно найти?

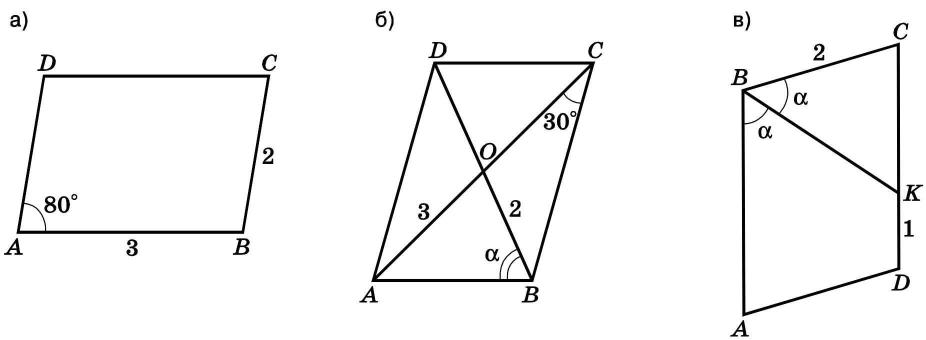


Рис. 23

П.11. Назовите параллелограммы, изображённые на рисунке 24.

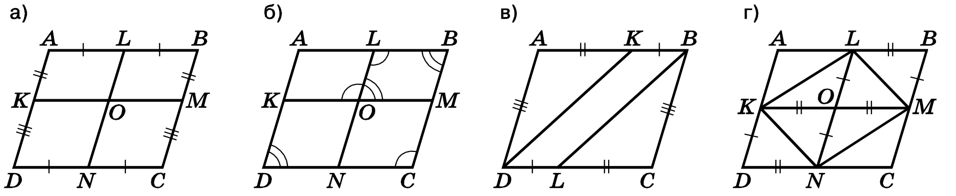


Рис. 24

Доказываем. **П.12.** Дайте развёрнутые формулировки и докажите следующие *признаки равенства прямоугольных треугольников*: а) по двум катетам; б) по гипотенузе и острому углу; в) по катету и прилежащему острому углу; г) по катету и противолежащему острому углу.

Урок 68. Площади

Цели урока. Повторить формулы для площадей многоугольников, повторить теорему Пифагора.

Вычисляя площади разных фигур, опираются на два основные свойства площади:

1) ***Площади равных фигур равны.***

2) ***Если фигура составлена из двух фигур, то её площадь равна сумме площадей составляющих её фигур.***

Опираясь на эти свойства, последовательно получают формулы для вычисления площадей прямоугольника и прямоугольного треугольника (рис. 25), произвольного треугольника ($S = \frac{1}{2} ah_a$, рис. 26), трапеции (рис. 27, *а*) и параллелограмма (рис. 27, *б*).

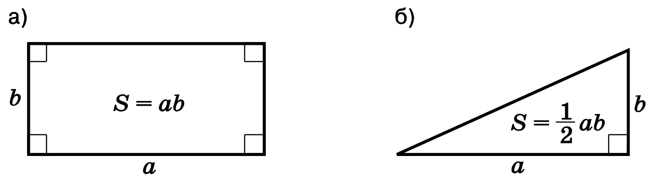


Рис. 25

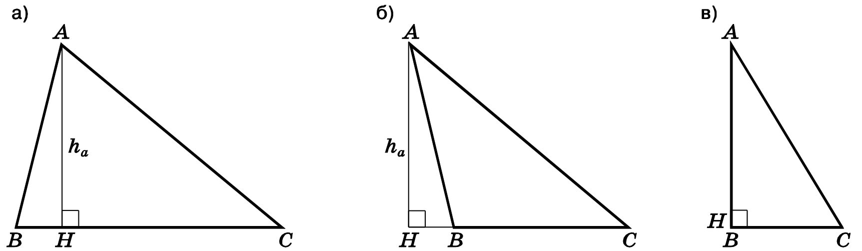
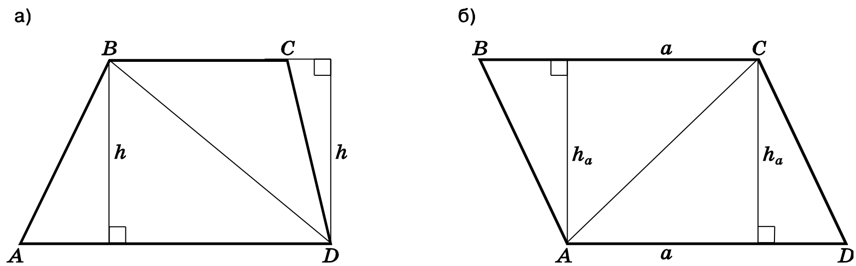


Рис. 26



$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)h \qquad S = ah_a$$

Рис. 27

Понятие площади даёт возможность сформулировать и доказать важнейшую теорему геометрии — теорему Пифагора: площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах (рис. 28).

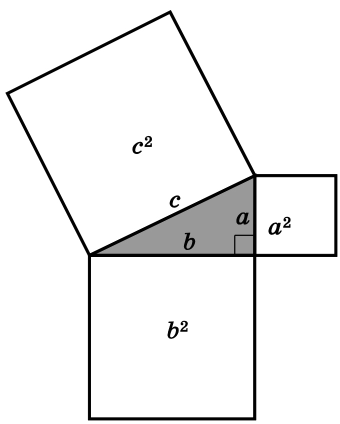


Рис. 28

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник T с катетами a и b и гипотенузой c. Построим два равных квадрата, стороны которых равны $a + b$: квадрат P с вершинами A, B, C, D и квадрат Q с вершинами K, L, M, N (рис. 29).

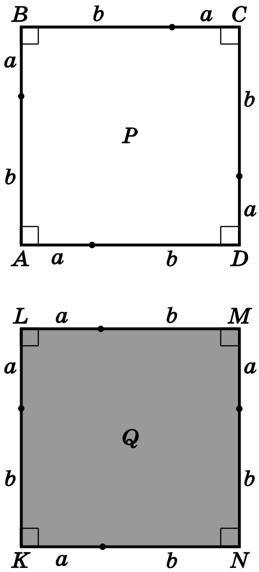


Рис. 29

На сторонах этих квадратов отмечены точки, разбивающие эти стороны на отрезки, равные отрезкам a и b (двумя способами). Соединяя последовательно точки разбиения сторон в квадрате P отрезками, получим разбиение квадрата P на четыре треугольника, равные треугольнику T, и на четырёхугольник F, все стороны которого равны c (рис. 30, *а*). Четырёхугольник F является квадратом, так как все его углы — прямые: они равны разности 180° и 90° (суммы острых углов прямоугольного треугольника T), т. е. равны 90°. Итак, F — квадрат со стороной c.

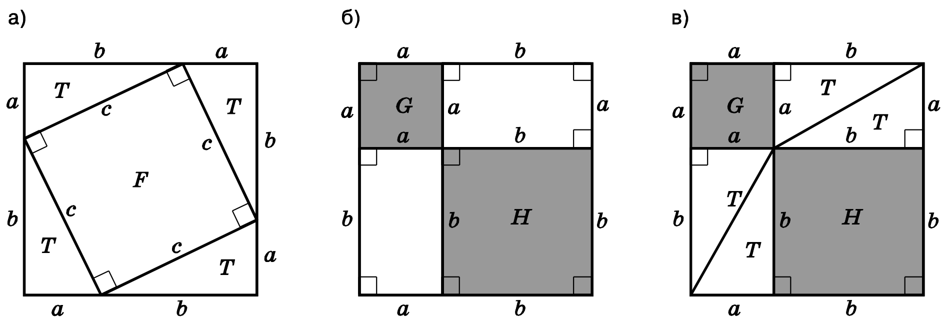


Рис. 30

Соединив отрезками точки разбиения противоположных сторон квадрата Q, разобьём его на квадрат G со стороной a, квадрат H со стороной b и два прямоугольника со сторонами a и b (рис. 30, *б*). Каждый из этих прямоугольников диагональю разобьём на два треугольника, равные треугольнику T (рис. 30, *в*).

Из свойств площади следуют равенства:

$S(P) = S(F) + 4S(T)$, $\quad S(Q) = S(G) + S(H) + 4S(T)$ и $S(P) = S(Q)$.

Поэтому $S(F) = S(G) + S(H)$. ■

Для применения теоремы Пифагора удобнее её другая, алгебраическая формулировка. Эта алгебраическая формулировка получится из первой, чисто геометрической формулировки, если вспомнить, что площадь квадрата равна квадрату его стороны. И тогда имеем такую теорему:

Теорема 7 (*теорема Пифагора*)**.** ***В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.***

Используя традиционные обозначения для катетов a, b и для гипотенузы c, имеем такое равенство:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Короче: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Фигуры, имеющие равные площади, называются **равновеликими.**

Задачи

***Смотрим.* П.13.** Какую часть от площади треугольника ABC составляет площадь S закрашенной его части на рисунке 31? Точки K, L, M — середины сторон треугольника ABC.

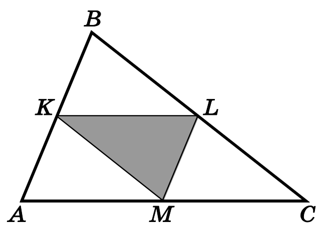


Рис. 31

П.14. Какую часть от площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырёхугольника P на рисунке 32?

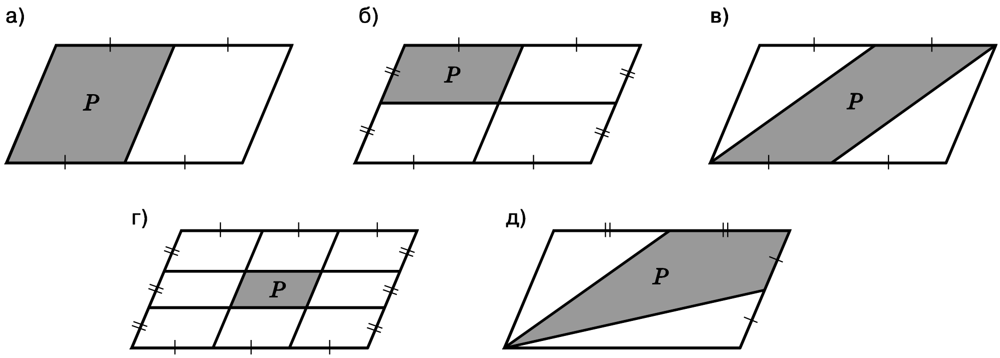


Рис. 32

Вычисляем. **П.15.** Вычислите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого: а) 62 см и 25 мм; б) 64 дм и 58 см. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

П.16. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, у которого: а) высота равна 5, а боковая сторона — 13; б) основание равно 16, а боковая сторона — 10.

П.17. Вычислите площадь равностороннего треугольника, у которого: а) сторона равна 6; б) высота равна 4.

П.18. Выразите через x площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого: а) катет равен x; б) гипотенуза равна x; в) высота, опущенная на гипотенузу, равна x.

П.19. Выразите через x площадь равностороннего треугольника, у которого: а) сторона равна x; б) высота равна x.

П.20. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Найдите площадь этой трапеции, если её основания равны: а) 4 и 6; б) a и b.

П.21. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой: а) основания равны 6 и 14, а наклонная к ним боковая сторона равна 10; б) основания равны a и b, а наклонная к ним боковая сторона равна c.

П.22. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой: а) основания равны 8 и 20, а боковая сторона равна 10; б) основания равны a и b, а боковая сторона равна c.

П.23. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60°. Найдите площадь трапеции, если её основания равны: а) 2 и 1; б) 4 и 10; в) a и b.

П.24. Вычислите площадь трапеции, у которой: а) основания 1,2 см и 8 мм, а высота 0,02 м; б) основания 1,5 м и 9 дм, а высота 60 см. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

П.25. Найдите высоты треугольника со сторонами 10, 10, 13.

П.26. Найдите высоты треугольника со сторонами 7, 8, 9.

П.27. Найдите площадь ромба с диагоналями a и b.

Доказываем. **П.28.** Глядя на рисунки 33—35, найдите различные доказательства теоремы Пифагора.

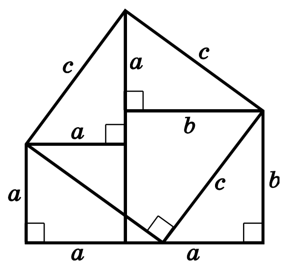


Рис. 33

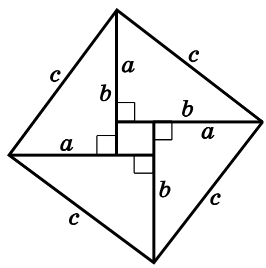


Рис. 34

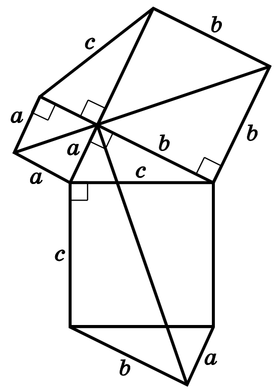


Рис. 35

Урок 69. Аксиоматический метод и систематический курс геометрии основной школы

Цели урока. Беседа учителя о современном аксиоматическом подходе к построению геометрии и об уровне строгости школьного курса геометрии. Знакомство с аксиоматикой евклидовой планиметрии и рассказ о развитии современной геометрии.

Урок 70. Итоговая контрольная работа

В итоговой контрольной работе ввиду её большого объёма можно предложить учащимся решить часть заданий. Можно выделить четыре обязательных задания или предложить ученику выбрать их самому (оговорив, за что ставятся оценки «отлично», «хорошо» и т. д.).

Вариант 1

Дан треугольник ABC, $\angle C = 90°$, $AC = 3\sqrt{3}$, $BC = 3$.

1. Найдите:

а) меры углов треугольника ABC;

б) радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC;

в) длину окружности, вписанной в треугольник ABC;

г) площадь сегмента в описанном вокруг треугольника ABC круге, который ограничен хордой AC и не содержит точки B.

2. CD — высота треугольника ABC, $DE \parallel BC$ (точка E лежит на AC). Найдите $AE : CE$.

3. Постройте разность векторов $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$.

4. AM — медиана треугольника ABC, точка K — середина AM. Разложите вектор $\overrightarrow{BK}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

6. Точка H лежит на AC, точка T — на AB и $HT \parallel BC$. В трапецию $CPTB$ можно вписать окружность. Найдите HT.

7. Точка P лежит на BC, точка S — на AC, точка Q — на AB и $BPSQ$ — ромб. Найдите длину его стороны.

8. Постройте треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с центром гомотетии в точке A и коэффициентом $k = -1{,}5$.

Решения

1. $AB^2 = 27 + 9 = 36$; $AB = 6$. а) $\sin A = 0{,}5$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$; б) 3; в) площадь ABC равна $4{,}5\sqrt{3}$, его периметр — $9 + 3\sqrt{3}$, поэтому $r = 9\sqrt{3} : (9 + 3\sqrt{3}) = 1{,}5(\sqrt{3} - 1)$; г) точка O — центр этого круга — середина гипотенузы AB, $\angle AOC = 120°$, радиус круга равен 3, площадь сектора AOC равна 3π, а площадь сегмента равна разности $3\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3}$.

2. $CD = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $CE = \frac{1}{2}$. $CD = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, $AE = AC - CE = 3\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$, $AE : CE = 3$.

4. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) - \vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

5. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 3\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 150° = -27$.

6. Окружность, вписанная в трапецию, вписана и в треугольник ABC, а потому её диаметр CH равен $3(\sqrt{3} - 1)$. Поэтому $AH = AC - CH = 3$ и $HT = 3\operatorname{tg}30° = \sqrt{3}$.

7. Если $BP = x$, то $BC = x + \frac{1}{2}x$ и так как $BC = 3$, то $BP = 2$.

Вариант 2

Дан треугольник ABC, $\angle C = 90^{\circ}$, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 6$.

1. Найдите:

а) площадь треугольника ABC;

б) длину окружности, описанной вокруг треугольника ABC;

в) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;

г) площадь сегмента в описанном вокруг треугольника ABC круге, который ограничен хордой BC и не содержит точки A.

2. CD — высота треугольника ABC, $DE \parallel AC$ (точка E лежит на BC). Найдите $BE : CE$.

3. Постройте разность векторов $\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB}$.

4. BM — медиана, F — её середина. Разложите вектор $\overrightarrow{AF}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

6. Точка K лежит на AB, точка T — на BC, $KT \parallel AC$. В трапецию $AKTC$ можно вписать окружность. Найдите KT.

7. Точка H лежит на AC, точка P — на AB, точка Q — на BC и $BQHP$ — ромб. Найдите HB.

8. Постройте треугольник, полученный параллельным переносом треугольника ABC на вектор $\overrightarrow{AF}$.

Решения

1. а) $BC^2 = 48 - 36 = 12$, $BC = 2\sqrt{3}$ $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6\sqrt{3}$;б) $2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$; в) $r = (2\sqrt{3}) : (2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}) = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})$; г) площадь круга равна 12π; точка O — центр этого круга — середина гипотенузы AB, $\angle BOC = 60°$, площадь сектора AOC равна 2π, а площадь сегмента равна разности $2\pi - 3\sqrt{3}$.

1. $BD = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$, $BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $CE = BC - BE = 2\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $BE : CE = 1 : 3$.

4. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$.

5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 120° = -12$.

6. $CT = 2r = \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3})$, $BT = BC - CT = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}) = 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 2$, $KT = BT\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{3}$.

7. Если x — сторона ромба, то $BC = \frac{3}{2}x$ и $x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$. Диагональ ромба $HB = 4$.

2. Решение задач

Глава I. Векторы и координаты

§ 1. Понятие вектора

1.2. Сонаправленность векторов

***Представляем.* 1.14.** Точка M лежит на прямой AB. В каком случае векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ сонаправлены? А когда они направлены противоположно?

Решение. Если точка M лежит вне отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ сонаправлены. Если точка M лежит внутри отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ противоположно направлены. Если точка M — один из концов отрезка AB, то один из векторов $\overrightarrow{AM}$ или $\overrightarrow{BM}$ — нулевой, а для такого вектора понятия сонаправленности и противоположной направленности не определены.

1.15. Известно, что $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{b} \downarrow\uparrow \vec{c}$. Каково взаимное расположение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$?

Ответ. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ сонаправлены.

1.3. Равенство векторов

***Представляем.* 1.21.** Сколько пар равных векторов задаётся вершинами треугольной призмы?

Решение. Такие пары векторов идут по рёбрам призмы. Каждой паре концов некоторого ребра призмы соответствуют два противоположных вектора. Поэтому на боковых рёбрах 6 пар равных векторов, а на основаниях ещё 6 пар, т. е. всего 12 пар равных векторов.

***Исследуем.* 1.22.** Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Какие ещё равные векторы можно задать этими точками A, B, C, D?

Решение. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.

1.23. Нарисуйте треугольник ABC. Нарисуйте точку K и отложите векторы $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{AC}$. Что вы заметили? Как бы вы это объяснили?

Решение. Надо заметить, что точки M и N совпадают. Объяснить это можно так. Из признаков равенства векторов и условия задачи вытекают равенства $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CM}$ (используя первые два равенства из условия задачи). Аналогично, используя и третье равенство из условия задачи, получаем, что $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CN}$. Поэтому $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CN}$, т. е. $M = N$. Это решение можно провести и без рисунков, но лучше нарисовать три параллелограмма и два равных треугольника ABC и KLM с соответственно параллельными сторонами. Об этой задаче полезно вспомнить, изучая сложение векторов и параллельный перенос.

1.24. Нарисуйте треугольник. От всех его точек отложите равные векторы. Концы этих векторов образуют новую фигуру. Сравните её с нарисованным треугольником. Какое предположение вы сможете сделать? Сможете ли вы его обосновать?

Решите аналогичные задачи для окружности и для куба.

Решение. Задача направлена на пропедевтику параллельного переноса. Поэтому, сделав предположения о равенстве построенных фигур исходным фигурам, следует оставить доказательство этих предложений до темы «Параллельный перенос».

Рассуждаем. **1.25.** Какие утверждения можно получить, если известно, что: а) $\overrightarrow{KL} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; в) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$?

Ответ. а) $K = L$; б) $A = B$; в) один из двух векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ — нулевой.

Находим величину. **1.27.** Найдите величины углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CA}$ для треугольника ABC: а) равностороннего; б) равнобедренного прямоугольного с прямым углом C; в) у которого $\angle A = 50°$ и $\angle B = 30°$; г) у которого $\angle A = 50°$ и $AC = AB$; д) у которого $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

Ответ. а) 60°, 120°, 120°, 60°; б) 45°, 135°, 135°, 45°; в) 50°, 150°, 130°, 50°; г) 50°, 115°, 130°, 50°; д) α, $180° - \beta$, $180° - \alpha$, α.

1.28. Точки B и C лежат по разные стороны от прямой OA, даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Найдите угол между $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если: а) $\angle \vec{a}\vec{b} = 30°$, $\angle \vec{a}\vec{c} = 50°$; б) $\angle \vec{a}\vec{b} = 100°$, $\angle \vec{a}\vec{c} = 120°$; в) $\angle \vec{a}\vec{b} = \alpha$, $\angle \vec{a}\vec{c} = \beta$.

Ответ. а) 80°; б) 140°; в) $\alpha + \beta$, если $\alpha + \beta < 180°$, и $360° - (\alpha + \beta)$, если $\alpha + \beta \geq 180°$.

1.29. Три вектора расположены на плоскости так, что угол между любыми двумя из них один и тот же. Чему равен этот угол?

Ответ. 120°.

1.30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какой угол образуют между собой векторы: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$; б) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; г) $\overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$; е) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{D_1A}$?

Решение. В каждом из случаев заменяем один из векторов равным ему вектором так, чтобы оба вектора были отложены из одной точки. а) Из точки D откладываем вектор $\overrightarrow{DD_1}$; б) из точки D откладываем вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$ на прямой AD; в) из точки A откладываем вектор $\overrightarrow{B_1C}$; г) из точки D откладываем вектор $\overrightarrow{CB_1}$ и рассматриваем равносторонний треугольник DA_1C_1; д) вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$ перпендикулярен плоскости DBB_1, в которой лежит вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$; е) рассматриваем равносторонний треугольник AB_1D_1 и замечаем, что векторы $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ равны.

Ответ. а) 45°; б) 135°; в) 90°; г) 60°; д) 90°; е) 120°.

§ 2. Сложение и вычитание векторов

2.1. Сложение векторов

Дополняем теорию. **2.1.** Докажите, что модуль суммы двух векторов не превосходит суммы модулей этих векторов. Выясните, когда имеет место равенство в этом нестрогом неравенстве. Обобщите этот результат на большее число слагаемых.

Решение. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы. Надо доказать, что

$$|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|. \qquad (*)$$

Рассмотрим общий случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. В этом случае выберем произвольную точку A и построим треугольник ABC, отложив $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Согласно неравенству треугольника $AC < AB + BC$. Это неравенство и есть неравенство (*) для общего случая. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то, очевидно, в (*) имеет место равенство. Если оба они ненулевые, то они либо сонаправлены, и тогда в (*) снова равенство, либо противоположно направлены, и в этом случае в (*) строгое неравенство.

Доказываем. **2.5.** Нарисуйте на плоскости четыре точки A, B, C, D. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Составьте другие аналогичные равенства. Можно ли эти равенства перенести на точки, не лежащие в одной плоскости?

Решение. В равенстве $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. и слева, и справа стоит вектор $\overrightarrow{AC}$. Этим оно и доказано. Точки A, B, C, D могут быть любые, например, они могут быть вершинами тетраэдра. Аналогичными равенствами могут быть любые равенства, в которых суммы составлены по «правилу цепочки», в которой первые и последние точки — одинаковые справа и слева. Например, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{QM}$.

2.6. Точки A, B, C, D являются серединами последовательных сторон четырёхугольника. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Докажите это равенство для случая, когда данные точки являются серединами отрезков четырёхзвенной замкнутой ломаной.

Решение. Рассмотрим любой четырёхугольник $KMPO$, и пусть точки A, B, C, D являются серединами его сторон KM, MP, PO и OK соответственно. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ — это половина вектора $\overrightarrow{KP}$, а вектор $\overrightarrow{CD}$ — это половина вектора $\overrightarrow{PK}$. Так как $\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PK} = \vec{0}$, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Исследуем. **2.7.** Даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Может ли: а) их сумма быть перпендикулярной одному из данных векторов; обоим данным векторам; б) их сумма образовывать равные углы с каждым из данных векторов; в) длина их суммы быть равна длине одного из векторов; обоих векторов?

Решение. а) Нарисуйте параллелограмм $ABDC$ с диагональю AD, перпендикулярной стороне AC, и тупым углом A. Тогда равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ даёт положительный ответ на первый вопрос задачи. Если сумма $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, то нулевой вектор ортогонален обоим слагаемым. Ненулевых векторов, удовлетворяющих указанному требованию, при рассмотрении нет. б) Положительный ответ можно дать, рассмотрев в качестве примера диагонали ромба. в) Может. Это меньшая диагональ ромба с углом 120°.

Применяем геометрию. **2.8.** Самолёт пролетел 200 км на юго-запад, а затем 300 км на запад. Сделайте соответствующий рисунок, используя векторы. На каком расстоянии он оказался от начальной точки? Придумайте сами похожую задачу.

Решение. Маршрут самолёта изобразим треугольником ABC, в котором сторона BC горизонтальна и равна 300, угол B равен 135°, а сторона AB равна 200. Высота AH этого треугольника и отрезок BH равны $100\sqrt{2}$ как катеты равнобедренного прямоугольного треугольника ABH, у которого гипотенуза $AB = 200$, отрезок $CH = CB + BH = 300 + 100\sqrt{2}$. Тогда $AB^2 = 100^2(13 + 6\sqrt{2})$, т. е. $AB \approx 460$ км.

2.2. Свойства сложения векторов

Находим величину. **2.13.** Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равна длина вектора: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{A_1C_1}$; б) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{A_1C_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{D_1A}$?

Решение. Складывая векторы, получаем: а) $\overrightarrow{A_1C_1}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\vec{0}$. Поэтому *ответы* такие: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) 0.

2.3. Вычитание векторов. Противоположные векторы

Дополняем теорию. **2.14.** Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ для любой точки O.

Доказательство. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Представляем. **2.18.** Представьте себе параллелограмм $ABCD$. Разностью каких векторов, заданных его вершинами, является вектор: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{DC}$?

Решение. а) Например, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$ и т. п.

2.19. Представьте себе тетраэдр $ABCD$. Разностью каких векторов, заданных его вершинами, является вектор: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{DC}$?

Решение. Аналогично предыдущей задаче. Например, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$.

Доказываем. **2.21.** Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажите, что для любой точки O верно равенство $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$. Верно ли обратное утверждение?

Решение. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (по одному из признаков равенства векторов) и $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$. Сменив знаки в последнем равенстве, получим, что $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$. Проведя эти рассуждения в обратном порядке, убеждаемся в справедливости обратного утверждения.

Исследуем. **2.22.** Вместе с двумя неколлинеарными векторами рассмотрим их сумму и разность. Может ли быть так, что: а) их разность перпендикулярна их сумме; б) их разность параллельна их сумме; в) равны модули их суммы и их разности; г) модуль разности больше модуля их суммы; д) один из данных векторов образует равные углы и с их суммой, и с их разностью?

Решение. Неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представим сторонами OA и OB параллелограмма $OACB$. Тогда их сумма $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$, а их разность $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

а) Если $OACB$ — ромб, то сумма $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярна их разности; б) из параллельности (коллинеарности) суммы двух векторов их разности вытекает коллинеарность самих векторов, что противоречит условию задачи, т. е. ответ на второй вопрос — отрицательный; в) если $OACB$ — прямоугольник, то модуль суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен модулю их разности; г) модуль разности $\vec{a}$ и $\vec{b}$ больше модуля их суммы, если угол между этими векторами — тупой, так как тогда BA больше OC; д) если векторы $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{OM} = \vec{a} - \vec{b}$ являются сторонами ромба $OMPC$, то его диагональ $\overrightarrow{OP} = 2\vec{a}$ составляет с его сторонами OC и OM равные углы, а значит, вектор $\vec{a}$ составляет равные углы с векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$; векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в этом случае взаимно перпендикулярны.

§ 3. Умножение вектора на число

3.2. Распределительные законы умножения векторов на число

Планируем. **3.12.** Отметьте любые три точки A, B, C. Как найти точку X, такую, что: а) $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$; б) $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XC}$; в) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$; д) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XC} = \vec{0}$?

Решение. Рассмотрим общий случай, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой. а) Точка X — вершина параллелограмма $XBAC$, т. е. её построить можно, продолжив медиану AM треугольника BAC за точку M на отрезок MX, равный AM; б, д) эти случаи такие же, как и случай а); в) $X = A$; г) X — центр масс треугольника ABC, т. е. точка пересечения его медиан.

3.13. Отметьте две точки A и B. Как найти точку X такую, что: а) $\overrightarrow{XA} = 3\overrightarrow{XB}$; б) $\overrightarrow{BX} = -2\overrightarrow{AX}$; в) $\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XB} = 3\overrightarrow{AB}$?

Решение. а) На луче AB надо отложить отрезок $AX = 1{,}5AB$; б) точка X делит отрезок AB в отношении $1 : 2$; в) из условия следует, что $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX})$, т. е. $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AX}$ и потому $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{XA}$; следовательно, точка X лежит на продолжении отрезка AB за точку A и удалена от точки A на $\frac{1}{3}AB$.

Находим величину. **3.14.** а) Точки C и D делят на три равные части отрезок AB (C между A и D), а точка O — любая точка плоскости. Выразите векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. б) Точка C делит отрезок AB в отношении $p : q$, а точка O — любая точка плоскости. Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ в) Выразите вектор, заданный биссектрисой треугольника, через векторы, заданные его сторонами, выходящими из той же вершины.

Решение. а) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

Аналогично $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

б) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$.

в)* Обозначим, как обычно, длины сторон треугольника ABC через a, b, c. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CP}$ — вектор биссектрисы CP. Так как $AP : PB = b : a$, то применим формулу из пункта б) и получим: $\overrightarrow{CP} = \frac{b}{a+b}\vec{a} + \frac{a}{a+b}\vec{b}$.

Доказываем. **3.15.** а) Точка C — середина отрезка AB, а точка O — любая точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. б) Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а точка O — любая точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Решение. а) Формула $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ следует из результата пункта б) задачи 3.14, так как $p = q = 1$. б) Пусть P — середина стороны AB. Тогда $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Так как $CM : MP = 2 : 1$, то снова по формуле пункта б) задачи 3.14 имеем, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

3.16. Докажите, что сумма векторов, идущих из произвольной точки в середины всех сторон треугольника, равна сумме векторов, идущих из этой же точки в его вершины. Можно ли обобщить это утверждение?

Решение. Пусть точки K, M, P — середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC соответственно и O — произвольная точка. Тогда $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

Из этих равенств и следует утверждение задачи. Аналогичное решение верно и для любого многоугольника.

§ 4. Векторная алгебра и векторный метод

4.1. Векторный метод

Рассуждаем. **4.2.** Как записать на векторном языке о точках A и B, что они: а) совпадают; б) различны?

Ответ. а) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

4.3. Как записать на векторном языке, что точка X лежит на: а) прямой AB; б) луче AB; в) отрезке AB? А как записать, что точка X не принадлежит этим фигурам?

Ответ. а) Точка X лежит на прямой AB, если

$$\overrightarrow{AX} = x\overrightarrow{AB}, \qquad (*)$$

где x — некоторое действительное число; б) если выполняется равенство (*) и при этом $x \geq 0$, то точка X лежит на луче AB; в) если выполняется равенство (*) и при этом $0 \leq x \leq 1$. Точка X не принадлежит этим фигурам, если эти условия не выполнены.

4.4. Как записать на векторном языке о точке X и отрезке AB: а) X — середина AB; б) X делит AB в отношении $1 : 2$; в) X делит AB в отношении $p : q$, считая от точки A?

Ответ. а) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$; б) $2\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$; в) $q\overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{XB}$.

4.5. Как записать на векторном языке, что: а) точки A, B, C являются вершинами треугольника; б) точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма?

Ответ. а) $\overrightarrow{AB} \neq x\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \neq x\overrightarrow{AC}$.

4.6. Как записать на векторном языке, что прямые AB и CK: а) совпадают; б) параллельны?

Ответ. а) $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} = y\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AB} \neq x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} = y\overrightarrow{CK}$.

4.7. Как записать на векторном языке об отрезках AB и CK, что: а) $AB = CK$ б) $AB = 2CK$?

Ответ. а) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CK}|$; б) $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{CK}|$.

Доказываем. **4.8.** Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. *Обобщите это утверждение.

Решение. Если отрезок KM соединяет середины соседних сторон AB и BC четырёхугольника $ABCD$, то $\overrightarrow{KM} = 0{,}5\overrightarrow{AC}$. Аналогично середины P и T сторон AD и DC зададут вектор $\overrightarrow{PT} = 0{,}5\overrightarrow{AC}$ Это верно как для плоского четырёхугольника $ABCD$, так и для пространственного. Следовательно, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PT}$, т. е. четырёхугольник $KMTP$ — параллелограмм.

Участвуем в олимпиаде. **4.9.** Как, используя векторы, построить треугольник, зная середины его сторон? А пятиугольник? А четырёхугольник?

Решение. Рассмотрим треугольник $A_1A_2A_3$, у которого точки C_1, C_2 и C_3 — середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_1A_3 соответственно. Выберем некоторую точку O. Тогда

$$2\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2},\ 2\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},\ 2\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}.$$

В этой системе линейных уравнений векторы $\overrightarrow{OA_k}$ — неизвестные, а векторы $\overrightarrow{OC_k}$ — известные. Система имеет единственное решение (выпишите его), и треугольник можно построить по серединам его сторон (это можно легко сделать и без векторной алгебры). Аналогичная система для пятиугольника (и вообще для многоугольника с нечётным числом сторон) также имеет единственное решение. Но четырёхугольник по серединам его сторон однозначно восстановить нельзя. Например, если через середины боковых сторон равнобокой трапеции провести её высоты, то эти высоты и прямые, на которых лежат основания трапеции, ограничат прямоугольник с теми же серединами сторон, что и у трапеции.

§ 5. Координаты

5.1. Векторы на координатной оси

Представляем. **5.1.** Верно ли, что чем длиннее вектор, лежащий на оси, тем больше его координата? Верно ли обратное?

Решение. Нет, не верно: длина вектора на оси — это модуль его координаты на этой оси. Вектор с длиной 2 и с координатой, равной –2, длиннее единичного вектора, но –2 < 1. Этот же пример иллюстрирует, что и обратное утверждение не верно.

Исследуем. **5.6.** Даны точки на оси: $A(-3)$, $B(-1)$, $C(4)$ и $D(6)$. Есть ли среди всевозможных векторов, заданных любыми двумя из этих точек, равные?

Ответ. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ и равенства обратных им векторов.

5.7. Как изменятся координаты векторов на координатной оси, если её единичный вектор изменил направление?

Ответ. Координаты векторов изменят знак.

5.2. Векторы на координатной плоскости

Дополняем теорию. **5.8.** Докажите, что проекция ненулевого вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.

Решение. Рассмотрим некоторую координатную ось x с началом в точке O и единичным вектором $\vec{e}$. Проекцию ненулевого вектора $\vec{a}$ на ось x обозначим a_x. Угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$ обозначим через φ. Надо доказать, что

$$a_x = |\vec{a}|\cos\varphi. \qquad (*)$$

Отложим ненулевой вектор $\vec{a}$ от точки O: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Тогда $|\vec{a}| = OA$. Если угол $\varphi = 0°$, то $a_x = OA$, $\cos 0° = 1$ и равенство (*) выполняется. Пусть угол φ — острый. Спроектируем точку A на ось x — получим точку A_1. В этом случае угол φ — острый угол прямоугольного треугольника OAA_1, проекция a_x — катет OA_1 этого треугольника, прилежащий к углу φ, $|\vec{a}|$ — гипотенуза этого треугольника и равенство (*) также выполняется. Если угол $\varphi = 90°$, то $a_x = 0$, $\cos 90° = 0$ и равенство (*) имеет место. Пусть угол φ — тупой. Снова построим проекцию A_1 точки A на ось x. В этом случае $a_x = -OA_1$ и $\cos\varphi = -\dfrac{OA_1}{OA}$, а потому равенство (*) и в этом случае справедливо. Наконец, если $\varphi = 180°$, то $a_x = -OA$, $\cos 180° = -1$ и равенство (*) снова верно. Равенство (*) доказано для всех случаев.

5.9. Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор, а φ_1 и φ_2 — углы, которые он составляет с осями координат. Докажите, что: а) $\vec{a} = \cos\varphi_1 \vec{i} + \cos\varphi_2 \vec{j}$; б) $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = 1$.

Решение. а) По условию задачи $|\vec{a}| = 1$, а потому согласно равенству (*), доказанному в предыдущей задаче, координаты вектора $\vec{a}$ равны $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$, т. е. имеет место равенство $\vec{a} = \cos\varphi_1 \vec{i} + \cos\varphi_2 \vec{j}$; б) сумма квадратов координат единичного вектора равна единице, что и написано в равенстве $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = 1$.

Ищем границы. **5.18.** Одна из координат вектора изменяется от 1 до 2, а другая — от –3 до 1. В каких границах лежит длина вектора?

Решение. Нарисуем на координатной плоскости x; y прямоугольник P, заданный неравенствами $1 \le x \le 2$, $-3 \le y \le 1$. Условию задачи удовлетворяют все векторы $\overrightarrow{OA}$ концы которых A принадлежат прямоугольнику P. Наименьшую длину из этих векторов имеет вектор с концом в точке (1; 0) — его длина равна 1, а наибольшую длину имеет вектор с концом в точке (2; –3) — его длина равна $\sqrt{13}$.

Ответ. От 1 до $\sqrt{13}$.

Исследуем. **5.19.** Может ли одна из координат вектора равняться его длине? А обе координаты?

Ответ. У нулевого вектора обе его координаты равны его длине. У ненулевого вектора его длине может быть равна одна его координата, если она положительна, а другая его координата при этом равна нулю.

5.3. Действия с векторами в координатной форме

Дополняем теорию. **5.20.** Дан вектор $\vec{a} = (x; y)$. Каковы координаты вектора $-\vec{a}$?

Ответ. $(-x; -y)$.

5.21. Каковы координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$? Дайте словесную формулировку этому свойству координат. Каковы координаты вектора $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$?

Ответ. $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$.

5.4. Метод координат. Уравнения окружности и прямой

Исследуем. **5.30.** По какой траектории движется в системе координат точка K, если она равноудалена: а) от точек $A(2; 0)$ и $B(0; -3)$; б) от точек $A(-3; 0)$ и $B(4; 1)$?

Решение. Ученики знают, что множеством точек на плоскости, равноудалённых от двух данных точек, является серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках. Его уравнение они могут вывести так. Если точка $K(x; y)$ равноудалена от точек $A(2; 0)$ и $B(0; -3)$, то $KA = KB$, или, что равносильно, $KA^2 = KB^2$. Поэтому в случае а) получаем уравнение $(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y + 3)^2$, т. е. $4x + 6y + 5 = 0$.

Аналогично в случае б) составляем уравнение $(x + 3)^2 + y^2 = (x - 4)^2 + (y - 1)^2$, т. е. $7x + y - 4 = 0$.

5.31. По какой траектории движется в системе координат точка K, если она равноудалена: а) от точки $A(2; 0)$ и оси y; б) от точки $A(0; -3)$ и оси x; в) от точки $A(2; 3)$ и прямой $x = 1$; г) от точки $A(-1; 2)$ и прямой $y = 4$? Напишите уравнение этой траектории. Какая у вас появилась гипотеза после решения этой задачи?

Решение. а) Если точка $K(x;\ y)$ равноудалена от точки $A(2;\ 0)$ и оси y, то $(x-2)^2 + y^2 = x^2$, т. е. $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$. Это уравнение задаёт параболу, осью которой является ось x. б) Аналогично предыдущему пункту, $x^2 + (y+3)^2 = y^2$, т. е. $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}$. Это уравнение задаёт параболу с осью симметрии на оси x. в) В этом случае $(x-2)^2 + (y-3)^2 = |x-1|^2$, т. е. $x = \frac{1}{2}y^2 - 3y + 6$. Снова получили квадратичную функцию, графиком которой является парабола. г) Согласно условию задачи $(x+1)^2 + (y-2)^2 = |y-4|^2$, т. е. $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$. После этих примеров должна появиться гипотеза: множеством точек на плоскости, равноудалённых от данной прямой и данной точки, не лежащей на этой прямой, является парабола (известная школьникам как график квадратичной функции).

5.32. Напишите уравнение множества точек K на координатной плоскости, если $KA = 2KB$ и точки A и B таковы: а) $A(1;\ 0)$ и $B(-5;\ 0)$; б) $A(0;\ 2)$ и $B(0;\ -6)$; в) $A(2;\ 2)$ и $B(-6;\ -6)$.

Решение. Эту задачу можно решать и в общем виде, подставив затем конкретные координаты точек A и B, но можно и последовательно рассмотреть три указанных случая. Во всех случаях приходим к уравнению вида $x^2 + y^2 + Kx + Ly + M = 0$, которое задаёт окружность. Установить центр и радиус этой окружности можно, преобразовав её уравнение к виду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

5.33. Напишите уравнение множества точек K на координатной плоскости, таких, что $KA^2 - KB^2 = 1$, а точки A и B таковы:

а) $A\ (2;\ 0)$ и $B\ (-3;\ 0)$; б) $A\ (0;\ 4)$ и $B\ (0;\ 6)$.

Решение. Сначала надо выбрать удобную систему координат, например, осью x выбрать прямую AB с началом O в середине отрезка AB и положительной полуосью — лучом OA. Пусть точка K имеет координаты $(x;\ y)$. Уравнение $KA^2 - KB^2 = 1$ в координатах запишется так: $(x-1)^2 + y^2 - (x+1)^2 - y^2 = 1$, т. е. $4x + 1 = 0$. Оно задаёт прямую.

§ 6. Скалярное умножение векторов

6.1. Косинус

Доказываем. **6.10.** Докажите, что сумма косинусов двух углов любого треугольника положительна.

Решение. Пусть α и β — углы треугольника ABC при вершинах A и B соответственно, а δ — внешний угол этого треугольника при вершине A. Тогда $\cos\alpha + \cos\delta = 0$. Так как $\beta < \delta$, то $\cos\beta > \cos\delta$, а потому $\cos\alpha + \cos\beta > 0$.

6.11. Докажите, что сумма косинусов двух острых углов прямоугольного треугольника больше единицы.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол C прямой. Тогда

$$\cos A + \cos B = \frac{AC}{AB} + \frac{BC}{AB} = \frac{AC + BC}{AB} > \frac{AB}{AB} = 1.$$

6.12. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Доказав это, получите формулу для вычисления длины медианы треугольника по трём его сторонам.

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и α — его угол при вершине A. Тогда $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\alpha$, а $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC\cos\alpha$. Сложив эти два равенства и применив равенства $AB = CD$ и $AD = BC$, получим, что

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Пусть M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Тогда медиана AM в треугольнике ABC — это половина диагонали AC параллелограмма $ABCD$. Обозначим, как обычно, a, b, c стороны треугольника ABC и положим $AM = m$. Тогда $AC = 2m$, $BD = 2a$, $AB = CD = c$, $BC = AD = b$ и, как доказано,

$$4m^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2.$$

Последнее равенство и даёт возможность выразить медиану через стороны треугольника.

6.13. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ. Докажите обратное утверждение.

Решение. Если параллелограмм — не прямоугольник, то одна его диагональ разбивает этот параллелограмм на два равных тупоугольных треугольника, а другая — на два равных остроугольных треугольника. Две другие стороны этих треугольников — стороны параллелограмма. Из теоремы косинусов следует, что диагональ, лежащая против тупого угла, больше диагонали, лежащей против острого угла.

Дополняем теорию. **6.14.** Докажите, что проекция вектора на ось равна скалярному произведению этого вектора и единичного вектора оси.

Решение. Рассмотрим некоторую координатную ось x с единичным вектором $\vec{e}$. Для нуль-вектора утверждение задачи 6.14 очевидно. Докажем его для ненулевого вектора. Проекцию ненулевого вектора $\vec{a}$ на ось x обозначим a_x. Угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$ обозначим через φ. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}|\,|\vec{e}|\cos\varphi = |\vec{a}|\cos\varphi$. Но уже доказано (задача 5.8), что $a_x = |\vec{a}|\cos\varphi$. Поэтому $a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}$.

6.15. Докажите, что: а) $\vec{a} \cdot (x\vec{b}) = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$; б) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Решение. а) $\vec{a} \cdot (x\vec{b}) = (x\vec{b}) \cdot \vec{a} = x(\vec{b} \cdot \vec{a}) = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

б) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Можно доказать эти равенства и используя координаты.

Задачи к главе I

Планируем. **I.1.** На координатной плоскости известны координаты двух вершин равностороннего треугольника. Как найти координату его третьей вершины?

Решение. Пусть A и B — известные вершины треугольника. Если бы эту задачу решали при помощи циркуля и линейки, то провели бы окружность с центром A и радиусом AB, а затем вторую окружность с центром B и радиусом AB. Две точки пересечения этих окружностей и дадут решение задачи. Чтобы найти координаты этих точек, надо написать уравнения окружностей и решить полученную систему.

I.2. На координатной плоскости известны координаты четырёх точек. Как проверить, будут ли они вершинами: а) ромба; б) прямоугольника; в) квадрата; г) равнобокой трапеции? Как узнать, лежат ли они на одной окружности?

Решение. Пусть заданы четыре точки A, B, C, D. Тогда заданы и все векторы, имеющие начала и концы в этих точках. а) Эти точки являются вершинами ромба, если длины четырёх из этих векторов будут равны друг другу. Но можно проверять и равенство двух из этих векторов (например, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, это означает, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм), а затем проверить перпендикулярность его диагоналей, т. е. векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$. б) В этом случае, доказав, что $ABCD$ — параллелограмм (см. пункт а), проверяем равенство длин диагоналей AC и BD. в) Сочетаем проверки, произведённые в случаях а) и б). г) Если, например, векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, но имеют разные длины, то $ABCD$ — трапеция, а если при этом равны длины сторон AB и CD, то эта трапеция — равнобедренная.

Чтобы проверить, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности, надо сначала найти точку M, равноудалённую от трёх точек A, B, C, а затем проверить, лежит ли точка M на окружности с центром M и радиусом MA. Координаты точки M находят, решив систему двух уравнений $MA = MB$ и $MA = MC$.

I.3. Известны координаты середин сторон треугольника. Как найти координаты его вершин?

Решение. Допустим, что a, b, c — известные абсциссы середин сторон треугольника, а x_1, x_2 и x_3 — неизвестные абсциссы его вершин. Тогда $x_1 + x_2 = 2a$, $x_2 + x_3 = 2b$, $x_1 + x_3 = 2c$, а потому $x_1 = a - b + c$, $x_2 = a + b - c$, $x_3 = b + c - a$.

Аналогично находим ординаты вершин.

Доказываем. **I.4.** Пусть точки A, B, C, D — вершины замкнутой ломаной $ABCDA$, а точки K, L, M, N — середины отрезков AB, BC, CD, DA. а) Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. б) Докажите, что эта же точка является серединой отрезка, соединяющего середины отрезков AC и BD.

Решение. а) То, что четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, доказывается так же, как в предыдущей задаче. Поэтому его диагонали KM и LN пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. б) Середина отрезка KM — точка P — задаётся вектором $\overrightarrow{OP} = 0{,}5(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) = 0{,}25(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Таким же вектором задаётся и середина отрезка, соединяющего середины отрезков AC и BD.

I.5. а) Выражение $ab + cd$ истолкуйте как скалярное произведение двух векторов. б) Пусть при этом $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$. Что означают эти равенства для рассмотренных векторов? в) Докажите, используя полученное векторное истолкование, что

$$|ab + cd| \le \sqrt{a^2 + c^2}\ \sqrt{b^2 + d^2}\ . \qquad (*)$$

Решение. а) Выражение $ab + cd$ — это скалярное произведение векторов (a; b) и (c; d). б) Равенство $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ означает, что эти векторы — единичные. в) Неравенство (*) означает, что модуль скалярного произведения двух векторов не превосходит произведения модулей этих векторов, так как модуль косинуса любого угла не больше единицы.

Исследуем. **I.6.** Пусть точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Проверьте, что выполнение равенства $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ для любой точки O является характерным свойством параллелограмма $ABCD$.

Решение. Равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ равносильно равенству $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, т. е. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, что и является характерным признаком параллелограмма $ABCD$.

I.7. Концы отрезка длины a скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. По какой линии движется его середина?

Решение. Пусть O — точка пересечения двух взаимно перпендикулярным прямых, A и B — концы отрезка, M — середина отрезка AB. Отрезок OM — медиана прямоугольного треугольника ABO, и она равна половине гипотенузы AB. Так как длина отрезка AB постоянна, то и длина отрезка OM тоже постоянна, а потому точка M пробегает окружность с центром в точке O и радиусом, равным половине отрезка.

I.8. На координатной плоскости найдите множество точек, таких, что: а) сумма расстояний от них до координатных осей равна сумме величин, обратных этим расстояниям; б) модуль разности расстояний от них до координатных осей равен модулю разности величин, обратных этим расстояниям.

Решение. а) Введём систему координат x; y с началом в вершине O прямого угла и с положительными осями по сторонам угла. Тогда по условию задачи положительные координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяют уравнению

$$x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \qquad (*)$$

Из равенства (*) вытекает, что $(x + y)(xy - 1) = 0$, а так как x, y положительны, то $xy = 1$. Последнее равенство задаёт ветвь гиперболы — графика обратной пропорциональности.

I.9. Пусть A и B — две данные точки. Какой фигурой является множество точек M, таких, что:

а) $MA^2 - MB^2 = c$; б) $MA^2 + k^2MB^2 = c$?

Решение. Введём систему координат, начало которой — середина отрезка AB — точка O, а осью абсцисс является прямая AB. Если длина отрезка AB равна $2a$, то координаты точки $A(-a; 0)$, а координаты точки $B(a; 0)$. Координаты точки $M(x; y)$, $MA^2 = (x + a)^2 + y^2$, $MB^2 = (x - a)^2 + y^2$.

а) $MA^2 - MB^2 = 4ax$. Уравнение $4ax = c$ задаёт прямую, перпендикулярную оси x.

б) $MA^2 + k^2MB^2 = (1 + k^2)x^2 + (1 + k^2)y^2 + 2ax(1 - k^2) + a^2(1 + k^2)$.

Уравнение $(1 + k^2)x^2 + (1 + k^2)y^2 + 2ax(1 - k^2) + a^2(1 + k^2) = c$ упростим, поделив на $1 + k^2$, выделив полный квадрат и перенеся постоянные слагаемые в правую часть. Получим уравнение вида $(x - p)^2 + y^2 = q$. Оно задаёт либо окружность с центром в точке $(p; 0)$, если q положительно, либо точку $(p; 0)$, если $q = 0$, либо пустое множество, если q отрицательно.

Работаем с компьютером. **I.10.** Пусть O — произвольная точка плоскости и AB — отрезок на этой плоскости. Пусть точка C — середина отрезка AB. Докажите и проверьте с помощью компьютерного эксперимента, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Указание. При проведении компьютерного эксперимента во всех трёх задачах по теме «Векторы и координаты» рекомендуется использование команды «Параллельный перенос».

Глава II. Преобразования

§ 7. Основные понятия

7.1. Понятие преобразования

Дополняем теорию. **7.1. Объединением** двух фигур называется фигура, состоящая из всех точек этих фигур. Объединение фигур M и P обозначается $M \cup P$. Докажите, что при всяком преобразовании образом объединения двух фигур является объединение образов этих фигур при рассматриваемом преобразовании.

Решение. Пусть f — некоторое преобразование, а M и P — произвольные фигуры. В задаче предлагается доказать равенство

$$f(M \cup P) = f(M) \cup f(P). \qquad (1)$$

Доказательство равенства двух фигур (множеств) состоит в том, что доказывают два утверждения: 1) каждая точка первой фигуры является точкой второй фигуры; 2) обратное ему утверждение. Сделаем это. 1) Если точка $Y \in f(M \cup P)$, то точка Y является образом некоторой точки $X \in M \cup P$. Следовательно, точка X принадлежит хотя бы одному из множеств M или P. А тогда её образ Y принадлежит одному из множеств $f(M)$ или $f(P)$, т. е. множеству $f(M) \cup f(P)$. Первое утверждение доказано. 2) Пусть точка $Y \in f(M) \cup f(P)$. Тогда она принадлежит одному из множеств $f(M)$ или $f(P)$. Поэтому Y является образом некоторой точки X одного из множеств M или P, т. е. точки X, принадлежащей множеству $M \cup P$. Следовательно, $Y \in f(M \cup P)$. Равенство (1) доказано.

Конечно, проведённое здесь теоретико-множественное рассуждение о равенстве двух фигур вряд ли следует разбирать со всеми учениками общеобразовательной школы. Но их внимание стоит обратить на то, что равенством (1) мы пользуемся обычно при построении образа конкретной фигуры, например многоугольника или многогранника: сначала строим образы их вершин, а затем образы соединяющих их сторон или рёбер.

Представляем. **7.3.** На осях координат Ox и Oy заданы соответственно отрезки [0; 2] и [0; 4]. а) Представьте две различные функции, отображающие отрезок [0; 2] на отрезок [0; 4]. б) Задайте эти функции аналитически. в) Найдите образ середины отрезка [0; 2] и прообраз середины отрезка [0; 4] для каждой из этих функций.

Решение. а), б) Проще всего взять функции $y = 2x$ и $y = x^2$. в) Образы середины отрезка [0; 2], т. е. точки 1, — это точки 2 и 1, прообразы середины отрезка [0; 4], т. е. точки 2, — это точки 1 и $\sqrt{2}$.

Можно также рассмотреть функции $y = 2\sqrt{2x}$ и $y = 4 - 2x$.

***Исследуем.* 7.5.** На плоскости фиксирована точка O и задано преобразование f, которое точке O ставит в соответствие точку O, а каждой точке X, отличной от точки O, — середину отрезка OX. Чем является при таком преобразовании образ: а) отрезка; б) треугольника; в) прямой; г) окружности; д) круга? Сделайте рисунки для различных случаев расположения перечисленных фигур и точки O.

Ответ. а) Отрезком; б) треугольником; в) прямой; г) окружностью; д) кругом.

7.6. На координатной плоскости каждой точке $M(x; y)$ ставится в соответствие точка $M'(x; 2y)$. Нарисуйте для этого преобразования образ какого-нибудь: а) отрезка; б) треугольника; в) параллелограмма; г) квадрата; д) трапеции. Сделайте рисунки для различных случаев расположения этих фигур относительно осей координат. Какими фигурами являются образы перечисленных фигур для данного преобразования? Имеет ли оно неподвижные точки?

Ответ. а) Отрезком; б) треугольником; в) параллелограммом; г) параллелограммом; д) трапецией. Неподвижные точки — точки оси x.

7.2. Важные примеры преобразований

***Вычисляем.* 7.14.** Равносторонний треугольник со стороной a проектируется на плоскость α в равнобедренный треугольник, основание которого — a. Вычислите площадь проекции этого треугольника на плоскость, если известен угол φ между данной плоскостью и плоскостью данного треугольника. Как изменяется эта площадь при изменении угла φ?

Решение. Высота равностороннего треугольника равна $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а высота его проекции, проведённая к основанию a, равна $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$. Поэтому площадь спроектированного треугольника равна $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\varphi$.

***Исследуем.* 7.15.** Может ли гомотетия быть какой-нибудь симметрией?

Решение. Центральная симметрия является гомотетией с коэффициентом –1.

7.16. Может ли быть тождественным преобразованием: а) гомотетия; б) параллельный перенос; б) какая-нибудь симметрия?

Решение. а) Тождественным преобразованием является гомотетия с коэффициентом 1; б) тождественным преобразованием является параллельный перенос на нуль-вектор; в) никакая симметрия не является тождественным преобразованием.

7.3. Взаимно обратные преобразования

***Рассуждаем.* 7.19.** Какие известные вам функции обратимы? Почему?

Решение. Монотонные функции, например линейные на всей оси или $y = x^2$ на полуоси $x > 0$.

7.20. Обратимы ли функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$, заданные на отрезке [0; 180°]? (Напомним, что синусы смежных углов равны.)

Решение. Синус не обратим (он не монотонен), а косинус обратим (он монотонен).

7.21. Приведите примеры взаимно обратных преобразований.

Решение. Например, переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ или гомотетии с общим центром и коэффициентами k и $\frac{1}{k}$.

7.22. Обратимо ли тождественное преобразование? Если да, то какое у него обратное преобразование?

Решение. Обратимо и совпадает с обратным ему преобразованием.

***Исследуем.* 7.23.** Может ли проектирование какой-нибудь фигуры на плоскость или на прямую быть обратимым?

Решение. Может, если каждая проектирующая прямая пересекает проектируемую фигуру не более чем в одной точке.

7.4. Композиция преобразований

***Доказываем.* 7.27.** Докажите, что на плоскости композиция двух осевых симметрий относительно взаимно перпендикулярных прямых является симметрией относительно точки пересечения этих прямых.

Решение. Пусть взаимно перпендикулярные прямые x и y пересекаются в точке O. Применим метод координат. Будем считать точку O началом координат, а прямые x и y — координатными осями. Возьмём любую точку $A(a; b)$. Симметричная ей относительно прямой x точка B имеет координаты $(a; -b)$, а симметричная точке B относительно прямой y точка C имеет координаты $(-a, -b)$. Серединой отрезка AC является точка O (по формуле деления отрезка пополам), т. е. точки A и C симметричны относительно точки O. Поскольку $C = S_y \circ S_x(A)$ и точка A — любая точка, то $S_y \circ S_x = S_O$. Решите ещё раз эту задачу, не применяя метод координат, а рассматривая прямоугольные треугольники с гипотенузами OA, OB и OC и катетами на прямых x и y.

***Представляем.* 7.28.** На плоскости композиция двух проектирований любую фигуру преобразует в точку. Какие это проектирования?

Решение. Рассмотрим проектирования на прямые a и b. Ясно, что a и b пересекаются в некоторой точке O. Первое проектирование — проектирование на прямую a — переводит любую фигуру в некоторую фигуру, лежащую на прямой a. Эта фигура перейдёт в точку — в точку O — лишь в том случае, когда прямые a и b взаимно перпендикулярны.

Ответ. Проектирование на две взаимно перпендикулярные прямые.

7.29. Каким преобразованием является композиция двух симметрий относительно взаимно перпендикулярных плоскостей?

Решение. Пусть взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой p. Возьмём любую точку A и проведём через неё плоскость γ. Пусть $B = S_\alpha(A)$ и $C = S_\beta\ (B)$. В плоскости γ композиция симметрий относительно плоскостей α и β является симметрией относительно точки пересечения прямой p и плоскости γ. Поэтому точки A и C симметричны относительно прямой p. Следовательно, $S_\beta \circ S_\alpha = S_p$, т. е. композиция зеркальных симметрий относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей является симметрией относительно прямой, по которой пересекаются эти плоскости.

§ 8. Движения

8.1. Определение и простейшие свойства движений

***Исследуем.* 8.1.** Может ли проектирование какой-нибудь фигуры на плоскость (на прямую) быть движением?

Ответ. Да, если эта фигура лежит на плоскости (на прямой), параллельной той плоскости (прямой), на которую ведётся проектирование.

8.2. Является ли гомотетия движением? Может ли какая-нибудь гомотетия быть движением?

Ответ. Гомотетия является движением лишь в том случае, когда её коэффициент равен 1 или –1, т. е. когда она является тождественным преобразованием или центральной симметрией.

8.3. Постройте точку $x'; y'$ — образ произвольной точки (x; y) для преобразований, заданных уравнениями: а) $x' = -x$, $y' = y$; б) $x' = -x$, $y' = -y$; в) $x' = x$, $y' = 2y$; г) $x' = x + 3$, $y' = -y - 1$; д) $x' = 3x$, $y' = 3y$; е) $x' = 0{,}6x - 0{,}8y$, $y' = 0{,}8x + 0{,}6y$. Какие из этих преобразований являются движениями?

Решение. По формуле расстояния между точками проверяем, сохраняется ли расстояние между образами двух точек.

Ответ. Движениями являются случаи а), б), г), е).

8.2. Свойства фигур, сохраняющиеся при движении (инварианты движений)

***Исследуем.* 8.5.** Можно ли каким-нибудь преобразованием отобразить сферу в круг того же радиуса? В случае положительного ответа приведите соответствующий пример. Может ли такое преобразование быть движением?

Решение. Например, проектирование на любую плоскость отображает сферу на круг того же радиуса. Движением оно не является, так как оно не взаимно однозначно. Образом сферы при движении может быть лишь фигура, не лежащая в плоскости (докажите, что это сфера), а кругом образ сферы при движении быть не может, так как круг — плоская фигура.

***Доказываем.* 8.6.** Докажите те свойства движений, которые сформулированы в тексте, но не доказаны.

Решение. Докажем, что при движении: а) образом луча является луч; б) образом прямой — прямая; в) образом тетраэдра — тетраэдр; г) образом параллельных прямых (отрезков) — параллельные прямые (отрезки).

а) Рассмотрим луч p с началом в точке O и его движение f. Отрезок OA, лежащий на луче p, перейдёт в отрезок O_1A_1, где $O_1 = f(O)$ и $A_1 = f(A)$. Покажем, что $f(p)$ — это луч O_1A_1. Возьмём на луче p любую точку X вне отрезка OA и пусть $X_1 = f(X)$. Отрезок O_1X_1 содержит отрезок O_1A_1, а значит, лежит на луче O_1A_1. Если длину отрезка OX неограниченно увеличивать, то и длина отрезка O_1X_1 будет неограниченно увеличиваться, а потому отрезки O_1X_1 заполнят луч O_1A_1.

б) Рассмотрим прямую AB и её движение f. Пусть $A_1 = f(A)$ и $B_1 = f(B)$. Прямая AB является объединением лучей AB и BA, а её образ $f(AB)$ будет объединением образов этих лучей (согласно задаче **7.1**), т. е. прямой A_1B_1.

в) Рассмотрим тетраэдр T с вершинами A, B, C, D и его движение f. Пусть $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$ и $D_1 = f(D)$. Во-первых, убедимся, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 не лежат в одной плоскости. Для этого заметим, что пары прямых AB и CD, AC и BD, AD и BC — это пары непересекающихся прямых. А если бы точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежали в одной плоскости, то хотя бы одна из пар прямых A_1B_1 и C_1D_1, A_1C_1 и B_1D_1, A_1D_1 и B_1C_1 была бы парой пересекающихся прямых, что невозможно, так как их прообразы не пересекаются. Это рассуждение доказывает, что *при движении образом неплоской фигуры является неплоская фигура*. В частности, точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — это вершины некоторого тетраэдра T_1. Этот тетраэдр является образом тетраэдра T при движении f: его заполняют отрезки D_1X_1 — образы отрезков DX, где точка X пробегает грань ABC тетраэдра T.

г) Во-первых, отметим, что *при движении плоская фигура переходит в плоскую фигуру*. Если бы это было не так и для некоторого движения f плоская фигура M перешла бы в неплоскую фигуру M_1, то движение f^{-1} перевело бы неплоскую фигуру M_1 в плоскую фигуру M, что, как установлено в п. в), невозможно. Далее, напомним, что две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Рассмотрим две параллельные прямые a и b, их движение f и их образы $a_1 = f(a)$ и $b_1 = f(b)$. Прямые a_1 и b_1 не имеют общих точек (поскольку a и b не имели общих точек), а также они лежат в одной плоскости. Поэтому они параллельны. Параллельные отрезки лежат на параллельных прямых. А потому при движении переходят в параллельные отрезки.

8.7. Докажите, что движение переводит медиану и биссектрису треугольника соответственно в медиану и биссектрису его образа.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, его движение f и его медиану AM. Пусть $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$ и $M_1 = f(M)$. Движение f переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, точку M — середину отрезка BC — переводит в точку M_1 — середину отрезка B_1C_1, а потому отрезок A_1M_1 — образ медианы AM — является медианой треугольника $A_1B_1C_1$.

Для биссектрисы доказательство аналогично. Поскольку движения сохраняют углы, то движение биссектрису угла переводит в биссектрису образа этого угла, а биссектрису треугольника — в биссектрису образа этого треугольника.

8.8. Докажите, что движение параллелограмм переводит в параллелограмм, параллелепипед — в параллелепипед, куб — в куб.

Решение. Одним из признаков параллелограмма является равенство его противоположных сторон. Движение сохраняет равенство отрезков, а потому параллелограмм переводит в параллелограмм. По той же причине движение переводит ромб в ромб. Поскольку движение сохраняет также углы (в частности, перпендикулярность), то оно переводит прямоугольник в прямоугольник, а квадрат в квадрат. Параллелепипед был определён в учебнике «Геометрия, 8», п. 5.5, как многогранник, ограниченный шестью параллелограммами. Движение переводит его в многогранник, ограниченный шестью параллелограммами, т. е. в параллелепипед. А куб — это параллелепипед, ограниченный квадратами. Его образом при движении является параллелепипед, ограниченный квадратами, т. е. куб.

8.9. Докажите, что движение окружность переводит в окружность, круг — в круг, сферу — в сферу, шар — в шар.

Решение. Рассмотрим окружность S с центром O и радиусом R, ограниченный ею круг D и их движение f. Пусть $S_1 = f(S)$, $O_1 = f(O)$, $D_1 = f(D)$. Построим окружность P с центром O_1 и радиусом R. Образ X_1 любой точки X окружности S принадлежит окружности P, так как $O_1X_1 = OX = R$. Поэтому S_1 содержится в P. Покажем, что S_1 совпадает с P. Фиксируем на окружности S некоторую точку A и пусть $A_1 = f(A)$. Положим, что точка X пробегает всю окружность S, начиная от точки A и возвращаясь в неё. Тогда образ точки X — точка X_1 — пробегает всю окружность P, так как угол $X_1O_1A_1$ равен углу XOA. Значит, каждая точка окружности P является образом некоторой точки окружности S. При движении точки X по окружности S радиусы OX «заметают» круг D, а их образы O_1X_1 заполняют круг, ограниченный окружностью P. Поэтому $f(D)$ — круг, ограниченный окружностью P.

Рассмотрим теперь пространственный случай — сферу T и ограниченный ею шар U. Выберем на T диаметрально противоположные точки A и B. Сфера T является объединением в пространстве всех окружностей с диаметром AB, а шар U — объединением в пространстве всех кругов с диаметром AB. Каждую такую окружность движение переведёт в окружность с диаметром A_1B_1 — образом диаметра AB. Объединение этих окружностей составит сферу — образ сферы T. Для круга рассуждение аналогично.

8.3. Параллельный перенос

Доказываем. **8.13.** На координатной плоскости уравнением $x^2 + y^2 = 1$ задана окружность. Докажите, что образ этой окружности при переносе на вектор $\vec{a}\,(a;\ b)$ задаётся уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.

Решение. При движении (в частности, при параллельном переносе) образом окружности является окружность того же радиуса (в данном случае равного 1), центр которой является образом центра исходной окружности (задача 8.9). В данном случае её центр получен из точки $O(0;\ 0)$ переносом на вектор $\vec{a}\,(a;\ b)$, т. е. является точкой с координатами $(a;\ b)$. Окружность радиуса 1 с центром $(a;\ b)$ имеет уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.

Вычисляем. **8.14.** Пусть параллелограмм P имеет площадь S. Пусть точка A — его вершина, O — точка пересечения его диагоналей, Q — образ параллелограмма P при переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$. Нарисуйте пересечение и объединение фигур P и Q и найдите их площади.

Решение. Пересечением параллелограммов P и Q будет параллелограмм, у которого те же углы, а стороны — половины сторон параллелограмма P. Площадь такого параллелограмма в четыре раза меньше площади S параллелограмма P. А чтобы найти площадь объединения, надо из удвоенной площади параллелограмма P вычесть площадь пересечения P и Q. Поэтому $S(P \cap Q) = 0{,}25S$, а $S(P \cup Q) = 1{,}75S$.

8.15. Пусть $\triangle ABC$ имеет площадь S и точка O — его центр масс. Нарисуйте образ $\triangle ABC$ при переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$. Вычислите площади пересечения и объединения $\triangle ABC$ и его образа.

Решение. Пересечением треугольника ABC и его образов при переносе — треугольника OB_1C_1 — будет треугольник OKM, у которого те же углы, что и у треугольника ABC, а стороны его — в три раза меньше сторон треугольника ABC. Поэтому площадь пересечения равна $\frac{1}{9}S$, а чтобы найти площадь объединения, надо из удвоенной площади треугольника ABC вычесть площадь треугольника OKM. Следовательно, площадь объединения равна $\frac{17}{9}S$.

8.4. Центральная симметрия

Представляем. **8.16.** Как расположены прямая и её образ при центральной симметрии?

Решение. Если прямая a проходит через центр O симметрии, то её образом при $S_O(a) = a$. Если же прямая a не проходит через O, то прямая $a_1 = S_O(a)$ параллельна прямой a. Действительно, если допустить, что прямые a и a_1 имеют общую точку A, то точка $A_1 = S_O(A)$ также будет их общей точкой. А так как точки O, A и A_1 лежат на одной прямой, то тогда прямая a пройдёт через точку O, что противоречит предположению.

Рассуждаем. **8.17.** Чем является композиция переноса и центральной симметрии?

Решение. Перенос не меняет направления, а центральная симметрия меняет все направления на противоположные. Поэтому их композиция изменит все направления на противоположные. А движение, которое меняет все направления на противоположные, является центральной симметрией.

Ответ. Центральная симметрия.

Вычисляем. **8.18.** Нарисуйте треугольник ABC. Обозначьте через O точку пересечения его медиан. Постройте треугольник $S_O(\triangle ABC)$. Нарисуйте его пересечение с треугольником ABC и найдите его площадь, считая, что площадь треугольника ABC равна 1.

Решение. Пусть точка K — середина стороны AB. Тогда точка $K_1 = S_O(K)$ — середина отрезка OC. Поэтому отрезок $A_1B_1 = S_O(AB)$ параллелен отрезку AB и проходит через середину отрезка OC. Отрезок A_1B_1 отсекает от треугольника ABC треугольник CMP, у которого стороны в три раза меньше сторон треугольника ABC. Поэтому его площадь равна $\frac{1}{9}$. Два других отрезка, симметричные сторонам треугольника ABC относительно точки O, также отсекают от треугольника ABC треугольники с площадями $\frac{1}{9}$. Поэтому всего от треугольника ABC отсечена площадь, равная $\frac{1}{3}$, а оставшийся шестиугольник имеет площадь, равную $\frac{2}{3}$.

8.5. Осевая симметрия на плоскости

Рисуем. **8.21.** Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C прямой. Нарисуйте треугольник, симметричный данному относительно: а) прямой AC; б) прямой BC; в) прямой AB. Какой фигурой в каждом случае является объединение данного треугольника и построенного? Может ли при этом получиться квадрат?

Ответ. а), б) Равнобедренный треугольник; в) прямоугольник, который может быть квадратом, если $AC = BC$.

Доказываем. **8.23.** Две прямые a и b пересекаются в точке O и симметричны друг другу относительно прямой c. Докажите, что точка O принадлежит прямой c.

Решение. Так как $O = a \cap b$ и $S_c(a \cap b) = S_c(a) \cap S_c(b) = b \cap a = O$, то $S_c(O) = O$, а потому точка O принадлежит c.

8.24. Композиция параллельного переноса T_a и симметрии относительно прямой p, параллельной вектору $\vec{a}$, называется *скользящей осевой симметрией.* Докажите, что $S_p{}^\circ \circ T_a = T_a \circ S_p$.

Решение. Возьмём произвольную точку A. Пусть $B = T_a(A)$ и $C = S_p(B)$. Треугольник ABC — прямоугольный, и его катет AB параллелен прямой p, а катет BC перпендикулярен этой прямой. Если $D = S_p(A)$, то $AD = BC$, а потому четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник. Следовательно, $T_a(D) = C$. Итак, произвольная точка A переводится в точку C как преобразованием $S_p \circ T_a$, так и преобразованием $T_a \circ S_p$. Поэтому имеет место равенство $S_p \circ T_a = T_a \circ S_p$.

Исследуем. **8.25.** Нарисуйте два равных треугольника. Как осевыми симметриями один из них перевести в другой?

Решение. Рисуем два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Рассмотрим общий случай, когда соответствующие вершины этих треугольников не совпадают. Пусть a — серединный перпендикуляр отрезка AA_1. Симметрией S_a переводим треугольник ABC в треугольник $A_1B_2C_2$. Пусть b — серединный перпендикуляр отрезка B_1B_2. Он проходит через вершину A_1, поскольку $A_1B_1 = A_1B_2$. Осевой симметрией S_b переводим треугольник $A_1B_2C_2$ в треугольник $A_1B_1C_3$. Возможны два случая. 1) $C_3 = C_1$. В этом случае мы двумя осевыми симметриями перевели ABC в $A_1B_1C_1$. 2) Точки C_3 и C_1 симметричны относительно прямой A_1B_1. Тогда симметрией относительно этой прямой переводим треугольник $A_1B_1C_3$ в треугольник $A_1B_1C_1$. Итак, не более чем тремя осевыми симметриями мы перевели треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. В частных случаях осевых симметрий может быть меньше трёх.

8.26. Пусть a и b — прямые, а $c = S_a(b)$. В каком случае: а) $b = c$; б) $b \parallel c$; в) b и c пересекаются?

Решение. а) Если $b = S_a(b)$, то либо a и b совпадают, либо a и b взаимно перпендикулярны. б) Если $b \parallel S_a(b)$, то a и b параллельны. в) Если $S_a(b)$ и b пересекаются, то a и b пересекаются и не перпендикулярны.

8.27. На координатной плоскости уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$ задана окружность. Каким уравнением задан образ этой окружности при симметрии относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) прямой, заданной уравнением $x = a$?

Указание. Радиус окружности не меняется, а потому следует лишь найти центр окружности.

Ответ. а) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; б) $(x+1)^2 + y^2 = 1$; в) $(x-(2a-1))^2 + y^2 = 1$.

8.6. Зеркальная симметрия

Доказываем. **8.32.** Композиция симметрии S_α относительно плоскости α и параллельного переноса T_a на вектор $\vec{a}$, параллельный плоскости α, называется *скользящей зеркальной симметрией*. Докажите, что $S_\alpha \circ T_a = T_a \circ S_\alpha$.

Решение. Эта задача аналогична задаче 8.24 о скользящей осевой симметрии на плоскости, и доказательство проводится так же, как там. Только в пространстве симметрия относительно плоскости, а на плоскости симметрия относительно прямой. Возьмём произвольную точку A. Пусть $B = T_a(A)$ и $C = S_\alpha(B)$. Треугольник ABC — прямоугольный, и его катет AB параллелен плоскости α, а катет BC перпендикулярен этой плоскости. Если $D = S_\alpha(A)$, то $AD = BC$, а потому четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник. Следовательно, $T_a(D) = C$. Итак, произвольная точка A переводится в точку C как преобразованием $S_\alpha \circ T_a$, так и преобразованием $T_a \circ S_\alpha$. Поэтому имеет место равенство $S_\alpha \circ T_a = T_a \circ S_\alpha$.

Исследуем. **8.33.** Чем является композиция двух зеркальных симметрий относительно двух параллельных плоскостей? Перестановочна ли она?

Решение. Применим метод координат. Пусть плоскости α и β параллельны. Возьмём произвольную точку A, построим затем точку $B = S_\alpha(A)$ и точку $C = S_\beta(B)$. Точка $C = S_\beta \circ S_\alpha(A)$. Три точки A, B, C лежат на одной прямой p, перпендикулярной плоскостям α и β. Эта прямая пересекает плоскости α и β в точках O и M. Если на прямой p ввести координату x с началом в точке O, то точки A, B, C и M получат некоторые координаты a, b, c и m соответственно. Поскольку точка O — середина отрезка AB, то $a = -b$. А так как точка M — середина отрезка BC, то $m = \frac{1}{2}(b + c)$. Поэтому $c = 2m + a$. Последнее равенство означает, что точка C получается из точки A переносом на удвоенный вектор $\overrightarrow{OM}$, т. е. композиция $S_\beta \circ S_\alpha$ — это перенос на вектор $2\overrightarrow{OM}$.

Повторив рассуждения для композиции $S_\alpha \circ S_\beta$, получим, что эта композиция — перенос на вектор $2\overrightarrow{MO} = -2\overrightarrow{OM}$ Следовательно, если α и β — различные плоскости, то перестановочности нет.

8.7. Поворот на плоскости

Представляем. **8.35.** Каким преобразованием является композиция двух осевых симметрий, оси которых пересекаются?

Ответ. Поворотом вокруг точки пересечения на угол, равный удвоенному углу между прямыми.

Вычисляем. **8.36.** Точка O — середина гипотенузы AB равнобедренного прямоугольного треугольника T с катетом, равным 1. Треугольник T_1 получен из треугольника T поворотом вокруг точки O на 90°. Найдите площадь пересечения и объединения треугольников T и T_1.

Решение. После поворота на 90° один из концов гипотенузы (например, точка B) перейдёт в вершину C прямого угла треугольника T, а другой конец A перейдёт в точку A_1. Пересечением треугольников T и T_1 будет прямоугольный треугольник ACO, площадь которого равна половине площади треугольника T, т. е. равна 0,25. А площадь объединения треугольников T и T_1 равна удвоенной площади треугольника T минус площадь их пересечения, т. е. равна 0,75.

8.37. Прямоугольный равнобедренный треугольник, катет которого равен a, повернули на угол, равный α, вокруг вершины прямого угла. Определите площади пересечения и объединения данного треугольника и его образа при повороте, если $\alpha = 45°$. Как изменится каждая из этих площадей при изменении угла α от 0° до 90°?

Решение. Начнём с ответа на вопрос об изменении площадей. Ясно, что при малых углах α пересечение исходного треугольника T и его образа T_1 заполняет почти весь треугольник T, а при $\alpha = 0°$ T и T_1 совпадают. Если же α близко к 90°, то пересечением T и T_1 будет узкий четырёхугольник, который при $\alpha = 90°$ станет катетом. Поэтому, когда α возрастает от 0° до 90°, площадь пересечения T и T_1 изменяется от $0{,}5a^2$ до 0. При этом площадь объединения будет изменяться от $0{,}5a^2$ до a^2. Вычислим эти площади при $\alpha = 45°$. Пусть после поворота треугольника ABC вокруг вершины прямого угла C на 45° его катет CB перешел в отрезок CB_1, перпендикулярный гипотенузе AB и пересекающий её в точке K, а катет CA перешёл в отрезок CA_1, параллельный гипотенузе AB. Отрезок A_1B_1 перпендикулярен лучу CA, поскольку луч CA — биссектриса угла A_1CB_1, а точки A_1 и B_1 симметричны относительно прямой CA. Отрезки CA и A_1B_1 пересекаются в некоторой точке M. Точку пересечения отрезков AB и A_1B_1 обозначим через P. Пересечением треугольников T и T_1 является четырёхугольник $CKPM$, который составлен из двух равных прямоугольных треугольников CKP и CMP. Их катеты легко найти: $CK = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а $KP = KB_1 = a - a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому площадь пересечения равна произведению CK и KP, т. е. равна $a^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$. А площадь объединения равна $a^2 - a^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = a^2\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Доказываем. **8.38.** Известно, что прямая a получена из прямой b поворотом вокруг некоторой точки O на острый угол α. Докажите, что один из углов, образованных прямыми a и b, равен α.

Решение. Пусть O — точка, вокруг которой происходит поворот. Если точка O лежит на прямой b, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда O не лежит на b. Укажем сначала, как можно построить прямую a. Опустим из точки O перпендикуляр OB на b. Затем отрезок OB повернём на угол α вокруг точки O и получим отрезок OA. Через точку A проведём прямую a, перпендикулярную отрезку OA. Прямые a и b пересекутся в некоторой точке C. В четырёхугольнике $OACB$ два прямых угла (в вершинах A и B) и в вершине O угол равен α. Поэтому $\angle ACB = 180° - \alpha$, а смежный ему угол — угол между прямыми a и b — равен α.

Исследуем. **8.39.** Равнобедренный треугольник T с вершиной O и углом φ при вершине поворачивают вокруг точки O на углы φ, 2φ, 3φ, 4φ и т. д. При каких углах φ объединение треугольника T и его образов при этих поворотах является правильным многоугольником? Сделайте несколько рисунков. Может ли треугольник T быть тупоугольным?

Ответ. Угол $\varphi = \frac{1}{n}\ 360°$, где n — любое натуральное число, не меньшее трёх. При $n = 3$ треугольник T — тупоугольный.

8.40. Нарисуйте два равных отрезка, лежащие в одной плоскости. Найдите движение плоскости, с помощью которого один отрезок может быть преобразован в другой. Рассмотрите различные случаи взаимного расположения отрезков на плоскости.

Решение. Пусть отрезки AB и KM равны. Если прямые AB и KM пересекаются, то их серединные перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O. Поворот вокруг точки O, совмещающий эти серединные перпендикуляры, совместит и отрезки AB и KM. Если прямые AB и KM совпадают или параллельны, то равны либо векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{KM}$, либо векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MK}$. В первом случае перенос на вектор $\overrightarrow{AK}$ совмещает отрезки AB и KM. Во втором их совмещает перенос на вектор $\overrightarrow{AM}$.

8.41. На плоскости последовательно выполнили два поворота с одним и тем же центром. Какое движение плоскости получилось? Рассмотрите различные углы поворотов.

Ответ. Поворот с тем же центром или тождественное преобразование.

8.42. На координатной плоскости xOy точка A имеет координаты $(a; b)$. Какие координаты будет иметь образ этой точки при повороте вокруг начала координат на угол 90°: а) по часовой стрелке; б) против часовой стрелки?

Решение. Пусть образом точки $A(a; b)$ после поворота будет точка $B(x; y)$. Так как длины векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны и эти векторы взаимно перпендикулярны, то получаем систему двух уравнений: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ и $ax + by = 0$.

Она имеет два решения: $x_1 = -b$, $y_1 = a$ и $x_2 = b$, $y_2 = -a$.

Ясно, что первое решение соответствует повороту против часовой стрелки (точка A из первой четверти переходит в точку B во второй четверти), а второе, симметричное первому относительно начала координат, — повороту по часовой стрелке.

§ 9. Симметрия фигур

9.1. Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур

Исследуем. **9.7.** Известно, что некоторая плоская фигура имеет две оси симметрии. Обладает ли эта фигура симметрией, отличной от осевой? Рассмотрите случаи параллельных и пересекающихся осей симметрии фигуры.

Решение. Если фигура имеет две параллельные оси симметрии, то она обладает и переносной симметрией, так как композиция двух осевых симметрий является переносом. Если фигура имеет две пересекающиеся оси симметрии, то она обладает и поворотной симметрией, так как композиция двух таких симметрий является поворотом.

9.8. Известно, что некоторая неплоская фигура имеет две плоскости симметрии. Обладает ли эта фигура симметрией, отличной от зеркальной? Рассмотрите случаи параллельных и пересекающихся плоскостей симметрии фигуры.

Решение. Если фигура имеет две параллельные плоскости симметрии, то она обладает и переносной симметрией, так как композиция двух зеркальных симметрий является переносом. Если фигура имеет две пересекающиеся плоскости симметрии, то она обладает и поворотной симметрией, так как композиция двух таких симметрий является поворотом.

9.3. Элементы симметрии фигур

Исследуем. **9.13.** Может ли фигура иметь несколько центров симметрии? В случае положительного ответа приведите соответствующий пример.

Ответ. Может, например прямая.

9.14. Верно ли, что центр симметрии фигуры может не принадлежать ей? Если да, то нарисуйте такую фигуру.

Ответ. Верно, например центр окружности.

9.15. Укажите какую-нибудь фигуру, не являющуюся окружностью или объединением концентрических окружностей и имеющую бесконечно много осей симметрии.

Ответ. Например, прямая: все перпендикулярные ей прямые являются её осями симметрии.

9.4. Симметрия правильных многоугольников, правильных пирамид и призм

Исследуем. **9.17.** Сколько осей поворотной симметрии имеет правильная призма, в основании которой многоугольник, имеющий: а) пять сторон; б) шесть сторон? Сделайте общий вывод.

Решение. а) У пятиугольной правильной призмы шесть осей поворотной симметрии: одна ось соединяет центры оснований призмы и пять осей проходят через центры боковых граней и середины противоположных им рёбер. б) У шестиугольной правильной призмы семь осей поворотной симметрии: одна ось соединяет центры её оснований, три оси проходят через центры параллельных боковых граней и три оси проходят через середины противоположных боковых рёбер. В общем случае n-угольная правильная призма имеет $n + 1$ ось поворотной симметрии.

9.18. Есть ли у куба плоскость симметрии, содержащая какую-нибудь его вершину? Есть ли такая плоскость симметрии у произвольного прямоугольного параллелепипеда?

Решение. У куба шесть плоскостей симметрии содержат по 4 вершины куба — это плоскости его диагональных сечений. У правильной четырёхугольной призмы, отличной от куба, две такие плоскости симметрии, а у произвольного прямоугольного параллелепипеда, все измерения которого различны, нет плоскостей симметрии, проходящих через его вершины.

9.19. Сколько плоскостей симметрии имеет куб? Как они расположены относительно рёбер куба?

Решение. У куба всего девять плоскостей симметрии: шесть плоскостей диагональных сечений и три плоскости, перпендикулярные четвёркам параллельных рёбер куба и проходящие через середины этих рёбер.

9.20. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, в котором: а) есть ровно две квадратные грани; б) есть четыре квадратные грани; в) нет квадратных граней?

Решение. а) Это правильная четырёхугольная призма, и у неё пять плоскостей симметрии: одна проходит через середины боковых рёбер и четыре — через четыре пары параллельных осей симметрии оснований призмы. б) Прямоугольный параллелепипед, у которого есть четыре квадратные грани, — это куб: все его грани — квадраты. У куба девять плоскостей симметрии (см. предыдущую задачу). в) Если у прямоугольного параллелепипеда нет квадратных граней, то у него три плоскости симметрии, которые проходят перпендикулярно к четвёркам его параллельных рёбер через их середины.

9.21. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная пирамида, в которой: а) четыре боковые грани; б) пять боковых граней? Сделайте общий вывод.

Указание. У правильной n-угольной пирамиды n плоскостей симметрии: они проходят через вершину пирамиды и оси симметрии её основания.

9.22. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная призма, в которой: а) три боковые грани; б) шесть боковых граней? Сделайте общий вывод. Сравните результаты задач 9.21 и 9.22.

Указание. Правильная n-угольная призма (отличная от куба) имеет $n + 1$ плоскость симметрии: одну плоскость симметрии, проходящую через середины боковых рёбер, и n плоскостей симметрии, проходящих через параллельные оси симметрии оснований призмы.

9.5. Правильные многогранники

Исследуем. **9.23.** Могут ли изображённые на рисунках 131—134 многогранники быть правильными?

Решение. У каждого из этих многогранников есть неравные грани, а потому они не являются правильными.

9.24. Нарисуйте: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) правильный октаэдр. В каждом случае нарисуйте различные сечения многогранника, являющиеся правильными многоугольниками. (Обратите внимание на то, что у правильного тетраэдра есть квадратное сечение. Где оно?) Есть ли среди сечений куба правильные пятиугольник и шестиугольник?

Решение. а) Сечения правильного тетраэдра, параллельные парам его скрещивающихся рёбер и проходящие через середины его остальных рёбер, являются квадратами. Любое его сечение плоскостью, параллельной какой-либо его грани, является правильным треугольником.

б) Сечения куба, параллельные его граням, являются квадратами. Правильных пятиугольников в сечении куба нет, поскольку в его пятиугольном сечении всегда есть две параллельные стороны (сечения параллельных граней), а в правильном пятиугольнике параллельных сторон нет. В сечениях плоскостями, перпендикулярными диагоналям и проходящими через центр куба, получаются правильные шестиугольники, которые проходят через середины рёбер куба. Правильные треугольники в сечении куба получаются, если на рёбрах куба, исходящих из одной вершины, отложены отрезки равной длины (их бесконечное множество).

в) Правильный октаэдр $ABCDMP$ составлен из двух правильных четырёхугольных пирамид $ABCDM$ и $ABCDP$, у которых общее основание — квадрат $ABCD$, а все боковые грани которых — правильные треугольники. Треугольных сечений у правильного октаэдра нет. Квадратными сечениями являются сечения $ABCD$, $AMCP$ и $BMDP$, а также все сечения плоскостями, параллельными плоскостям этих квадратов. Правильных пятиугольников (а также семиугольников) в сечении правильного октаэдра нет, поскольку в них нет параллельных сторон. Правильный шестиугольник получится в сечении плоскостью, параллельной граням MAB и CDP, которая проходит через середины остальных шести рёбер октаэдра, не принадлежащих этим граням. Ещё два аналогичных правильных шестиугольника дают плоскости, одна из которых параллельна граням MBC и ADP, а другая — параллельна граням PAB и CDM.

9.25*. От правильного тетраэдра отрезали четыре равных правильных тетраэдра. Нарисуйте различные варианты многогранников, которые могли при этом получиться. Имеет ли получившийся многогранник центр, оси, плоскости симметрии? Обладает ли он поворотной симметрией? Сделайте развёртку получившегося многогранника и склейте его.

Решение. Если тетраэдры отсекаются средними линиями граней исходного тетраэдра, то получится правильный октаэдр. В других случаях получим восьмигранник, у которого четыре грани — правильные треугольники, а остальные четыре — шестиугольники с параллельными и равными противоположными сторонами. Он обладает теми же симметриями, что и исходный тетраэдр, так как самосовмещается при самосовмещении тетраэдра.

9.26. От куба отрезали восемь равных правильных треугольных пирамид. Сколько граней имеет получившийся многогранник? Имеет ли он элементы симметрии? В случае положительного ответа перечислите их. Сделайте развёртку получившегося многогранника и склейте его.

Решение. Получившийся многогранник имеет четырнадцать граней. Он имеет те же симметрии, что и исходный куб, так как самосовмещается при самосовмещении куба.

§ 10. Подобие

10.1. Преобразование подобия и его простейшие свойства

Представляем. **10.1.** Приведите примеры подобных фигур.

Ответ. Например, два квадрата, два круга, два куба.

10.2. Придумайте признаки подобия: а) прямоугольников; б) ромбов; в) параллелограммов; г) прямоугольных параллелепипедов.

Ответ. а) Два прямоугольника подобны, если их стороны пропорциональны; б) два ромба (отличные от квадрата) подобны, если их острые углы равны; в) два параллелограмма подобны, если их стороны пропорциональны и углы равны; г) два прямоугольных параллелепипеда подобны, если их измерения пропорциональны.

10.3. Модели кораблей, макеты зданий (в музеях) имеют обычно длину или высоту, равную примерно 1 м. Как вы думаете, с каким коэффициентом подобия изготавливаются такие модели?

Ответ. Если длина реального корабля равна 100 метрам, то коэффициент подобия при изготовлении модели равен 0,01.

10.4. Каков коэффициент подобия Гулливера и лилипута? Гулливера и великана? Дюймовочки и её матери? Мальчика-с-пальчика и Людоеда? (Дайте ответы на вопросы, прочитав сказки Дж. Свифта «Путешествие Гулливера», Г. - Х. Андерсена «Дюймовочка», братьев Гримм «Мальчик-с-пальчик».)

Решение. В «Путешествиях Гулливера» Дж. Свифта сказано, что лилипуты были ростом около 6 дюймов, т. е. 0,5 фута, а *великаны* — около 60 футов. Если полагать рост Гулливера равным 6 футам, то коэффициент подобия Гулливера и лилипута равен $\frac{1}{12}$, а коэффициент подобия Гулливера и великана равен 10. Рост Дюймовочки — дюйм, т. е. $\frac{1}{12}$ фута, а рост её матери примерно 5 футов. Поэтому коэффициент их подобия равен 60. Если Мальчик-с-пальчик имеет рост 4 дюйма, а Людоед — 6 футов, то их коэффициент подобия равен 18.

Доказываем. **10.5.** Докажите, что любые две окружности подобны.

Решение. Пусть даны две окружности: S с центром O и радиусом R и S_1 с центром O_1 и радиусом R_1. Возьмём любые две точки A и B на окружности S и поставим им в соответствие точки A_1 и B_1 окружности S_1 так, что луч OA сонаправлен с лучом O_1A_1, а луч OB сонаправлен с лучом O_1B_1. Тогда углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны. Положим $\angle AOB = 2\varphi$. Вычисляя расстояния AB и A_1B_1, получим, что $A_1B_1 = 2R_1\sin\varphi$ и $AB = 2R\sin\varphi$. Поэтому $A_1B_1 = \frac{R_1}{R}AB$. Итак, окружности S и S_1 подобны с коэффициентом $\frac{R_1}{R}$.

10.6. Докажите, что любые два круга подобны.

Решение. Пусть даны два круга: M с центром O и радиусом R и M_1 с центром O_1 и радиусом R_1. Каждой точке X круга M ставим в соответствие точку X_1 круга M_1, такую, что вектор $\overrightarrow{O_1X_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k = \dfrac{R_1}{R}$. Указанное преобразование является подобием, отображающим круг M на круг M_1. Действительно, вектор

$\overrightarrow{X_1Y_1} = \overrightarrow{O_1Y_1} - \overrightarrow{O_1X_1} = k\overrightarrow{OY} - k\overrightarrow{OX} = k\overrightarrow{XY}$.

10.7. Как по плану местности (или по карте) определить расстояние между двумя объектами?

Решение. Полагаем, что на плане (на карте) изображена местность, которую можно считать плоской. На карте должен быть указан масштаб k. Измеряем расстояние d между изображениями двух объектов. Тогда $d = kD$, где D — расстояние между самими объектами. Зная d и k, находим D: $D = d : k$.

10.2. Гомотетия

Дополняем теорию. **10.8.** Напишите формулы, которые на координатной плоскости (в координатном пространстве) задают гомотетию с коэффициентом k и с центром в начале координат.

Решение. Такие формулы — это просто координатная запись векторного равенства $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, т. е. $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$.

Доказываем. **10.11.** Докажите, что композиция двух гомотетий с общим центром является гомотетией. Чему равен её коэффициент?

Решение. Пусть гомотетии g_1 и g_2 имеют общий центр O и коэффициенты k_1 и k_2 соответственно. Тогда если X — произвольная точка, $X_1 = g_1(X)$ и $X_2 = g_2(X_1)$, то

$$\overrightarrow{OX_1} = k_1\overrightarrow{OX} \text{ и } \overrightarrow{OX_2} = k_2\overrightarrow{OX_1}.$$

Подставляя во второе равенство выражение для $\overrightarrow{OX_1}$ из первого равенства, получаем, что $\overrightarrow{OX_2} = k_1k_2\overrightarrow{OX}$ А это и значит, что композицией g_1 и g_2 является гомотетия с тем же центром и коэффициентом k_1k_2. Ясно, что в этом случае гомотетии g_1 и g_2 перестановочны.

10.12. Докажите, используя гомотетию, теорему о средней линии треугольника.

Решение. Пусть точка K — середина стороны AB треугольника ABC, а M — середина его стороны AC. Тогда $\overrightarrow{AK} = 0{,}5\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM} = 0{,}5\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM} =$ $= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = 0{,}5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0{,}5\overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{KM} = 0{,}5\overrightarrow{BC}$.

Последнее векторное равенство означает, что средняя линия KM треугольника ABC параллельна его стороне BC и равна её половине.

Исследуем. **10.13.** Сколько центров гомотетии могут иметь два параллельных отрезка?

Решение. Если данные отрезки равны, то они — противоположные стороны параллелограмма, а центром их гомотетии является точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. В этом случае гомотетия — это центральная симметрия. Если данные отрезки не равны, то они являются основаниями трапеции. Тогда у них два центра гомотетии — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции и точка пересечения диагоналей трапеции.

10.14. Какие две прямые гомотетичны? Где может лежать их центр гомотетии? Каким может быть коэффициент гомотетии?

Решение. Гомотетичны любые две параллельные прямые a и b. Центром их гомотетии может быть любая точка O, не лежащая на a и b. Коэффициент их гомотетии равен отношению расстояний от точки O до прямых a и b, взятому со знаком «минус», если O лежит в полосе между a и b, и со знаком «плюс», если O лежит вне этой полосы. Таким образом, этот коэффициент может быть любым ненулевым числом.

10.15. Какие две плоскости гомотетичны? Где может лежать их центр гомотетии? Каким может быть коэффициент гомотетии?

Решение аналогично решению предыдущей задачи. Гомотетичны любые две параллельные плоскости. Центром их гомотетии может быть любая точка O, не лежащая на этих плоскостях. Коэффициент гомотетии равен отношению расстояний от точки O до плоскостей, взятый со знаком «минус», если точка O лежит в слое между плоскостями, и со знаком «плюс», если точка O лежит вне этого слоя. Таким образом, этот коэффициент может быть любым ненулевым числом.

10.16. Может ли какое-нибудь движение быть частным случаем гомотетии?

Ответ. Да, гомотетия с коэффициентом, равным 1, — это тождественное движение, а гомотетия с коэффициентом –1 является центральной симметрией.

10.17. Верно ли, что гомотетичны любые два: а) многоугольника с соответственно параллельными сторонами; б) прямоугольных параллелепипеда с соответственно параллельными рёбрами?

Ответ. Нет: а) квадрат и прямоугольник, отличный от квадрата, не гомотетичны; б) куб и прямоугольник, отличный от куба, не гомотетичны.

10.3. Свойства подобных фигур

Доказываем. **10.18.** Докажите, что любые два отрезка подобны. Чему равен коэффициент их подобия?

Решение. Даны два отрезка a и b. Гомотетия g с коэффициентом $k = \dfrac{b}{a}$ и любым центром переведёт отрезок a в отрезок c, равный отрезку b. Отрезки c и b можно совместить движением f. Композиция g и f и является подобием, которое переводит a в b.

10.19. Докажите, что подобны любые два: а) квадрата; б) равносторонних треугольника; в) куба.

Решение. Сначала гомотетией с коэффициентом, равным отношению сторон квадратов (равносторонних треугольников, кубов), и с любым центром переводим первый квадрат (равносторонний треугольник, куб) в равный ему квадрат (равносторонний треугольник, куб), а затем совмещаем их движением.

10.20. Докажите, что при подобии середина отрезка переходит в середину его образа.

Решение. Характерным свойством середины C отрезка AB является векторное равенство $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Гомотетия все векторы умножает на коэффициент гомотетии, а потому равенство $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ после гомотетии даст аналогичное векторное равенство для образов точек A, B, C. Следовательно, гомотетия середину отрезка переводит в середину отрезка. И движение середину отрезка переводит в середину отрезка. Это композиция гомотетии и движения. Поэтому и при подобии середина отрезка перейдёт в середину отрезка.

10.21. Докажите, что все гиперболы, т. е. графики функций вида $y = \frac{a}{x}$, подобны.

Решение. Рассмотрим графики функций $y = \frac{a}{x}$ и $y = \frac{c}{x}$. Выполним гомотетию g, заданную формулами $x' = kx$, $y' = ky$. Если из этих равенств выразить x и y и подставить в равенство $y = \frac{a}{x}$, то получим $y' = \frac{k^2 a}{x'}$. Из равенства $c = k^2 a$ находим коэффициент k той гомотетии, которая переведёт первую гиперболу во вторую гиперболу.

Исследуем. **10.22.** Рассматривается подобие треугольника. Что будет образом его: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) средней линии?

Решение. а), г) Образом медианы (средней линии) является медиана (средняя линия), поскольку середина отрезка при подобии переходит в середину. б), в) Образом биссектрисы (высоты) является биссектриса (высота), поскольку углы при подобии (в частности, перпендикулярность) сохраняются.

10.23. Даны два подобных треугольника. Одна из высот одного треугольника равна высоте другого. Равны ли эти треугольники?

Решение. Нет, не равны в общем случае, так как не сказано, соответствующие ли высоты. Например, «египетские» треугольники 30, 40, 50 и 18, 24, 30 подобны, но не равны, хотя и имеют равные высоты: 24.

Применяем геометрию. **10.24.** Чугунные гири весом 1 кг, 2 кг и 5 кг имеют одинаковую форму. Каковы отношения линейных размеров этих гирь?

Решение. Вес гири пропорционален её объёму. Поэтому куб отношения линейных размеров гирь равен отношению их весов. Поэтому линейные отношения двухкилограммовой (пятикилограммовой) гири к гире весом в 1 кг равны $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25$ ($\sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$).

10.4. Признаки подобия треугольников

Доказываем. **10.28.** а) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AK и BM. Докажите, что треугольники AKC и BMC подобны. б) Решите ту же задачу, что и в пункте а), для тупоугольного треугольника.

Решение. Эти прямоугольные треугольники имеют общий острый угол C, когда треугольник ABC — остроугольный. Поэтому они подобны.

10.29. Прямая a пересекает две стороны треугольника и параллельна третьей его стороне. Докажите, что прямая a рассекает стороны этого треугольника на пропорциональные отрезки и отсекает подобный ему треугольник.

Решение. Пусть прямая a параллельна стороне BC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке K и сторону AC в точке M. Подобие треугольников ABC и AKM

следует из равенства их углов. Далее, $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AM}$. Заменив в этой пропорции числители суммами $AK + KB$ и $AM + MC$ и поделив почленно, получим равенство $\frac{KB}{AK} = \frac{MC}{AM}$.

Задачи к главе II

Планируем. **II.1.** В одной полуплоскости заданы два равнобедренных треугольника, основания которых лежат на граничной прямой a этой полуплоскости. Как провести прямую, параллельную прямой a, которая пересекает эти треугольники по равным хордам?

Решение. Пусть точка O — середина основания треугольника T, а точка P — середина основания треугольника T_1. Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OP}$ «сдвигаем» треугольник T в треугольник T^*. Если боковые стороны треугольников T_1 и T^* пересекутся в точках A и B, то прямая AB и будет искомой прямой — задача имеет единственное решение. Если их боковые стороны не пересекаются, то задача не имеет решения. Наконец, если треугольники T_1 и T^* совпадут, т. е. T_1 и T — равные треугольники, то число решений задачи бесконечно.

Доказываем. **II.2.** Докажите, что два выпуклых четырёхугольника подобны тогда и только тогда, когда соответственно равны их углы и углы между их диагоналями.

Решение. Пусть заданы выпуклые четырёхугольники $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$, а O и O^* — точки пересечения их диагоналей. Если $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$ подобны, то, как вытекает из сохранения углов при подобии, соответственно равны их углы и углы между диагоналями. Докажем обратное утверждение: если соответственно равны углы четырёхугольников $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$, а также углы между их диагоналями, то эти четырёхугольники подобны. Всегда гомотетией можно преобразовать четырёхугольник $ABCD$ в подобный ему четырёхугольник, так, чтобы образ стороны AB стал равен стороне A^*B^*, и данная задача сводится к такой задаче о равенстве четырёхугольников: доказать равенство двух четырёхугольников $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$, у которых соответственно равны углы и углы между диагоналями, а также равны стороны AB и A^*B^*. Решим эту задачу.

Можно считать, что рассматриваемые четырёхугольники имеют общую сторону AB, лежат с одной стороны от прямой AB, и поскольку равны углы A и A^*, а также углы B и B^*, то лучи AD и A^*D^* совпадают, а также совпадают лучи BC и B^*C^*. Если четырёхугольники $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$ совпали, то утверждение об их равенстве доказано. Если же они не совпадают, то в силу равенства углов C и C^* стороны CD и C^*D^* параллельны и один из четырёхугольников $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$ лежит внутри другого. Пусть $ABCD$ лежит внутри $A^*B^*C^*D^*$. Тогда треугольник AOB лежит внутри треугольника AO^*B и его угол в вершине O больше угла AO^*B, что противоречит условию задачи.

Итак, четырёхугольник, гомотетичный четырёхугольнику $ABCD$, равен четырёхугольнику $A^*B^*C^*D^*$, а сами четырёхугольники $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$ подобны.

II.3. Докажите, что точки пересечения медиан четырёх треугольников, вершины которых совпадают с вершинами данного выпуклого четырехугольника, являются вершинами четырёхугольника, гомотетичного данному.

Решение. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть точки M, P, K, T — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно, а точка O – точка пересечения диагоналей KM и PT параллелограмма $MPKT$. Центр тяжести треугольника ABC обозначим D^*, центр тяжести треугольника BCD обозначим A^*, центр тяжести треугольника ACD обозначим B^* и, наконец, центр тяжести треугольника ABD обозначим C^*. Отрезок AK является медианой треугольника ABD, а потому точка B^* лежит на отрезке AK и $AB^* : B^*K = 2{:}1$. Аналогично точка A^* лежит на отрезке BK и $BA^* : A^*K =$ $= 2 : 1$. Следовательно, $AB : B^*A^* = 3 : 1$. Пусть M^* — точка пересечения отрезков B^*A^* и KM. Тогда $OM : OM^* = 3 : 1$. Поэтому гомотетия g с центром O и коэффициентом –3 переводит отрезок A^*B^* в отрезок AB.

Рассуждая аналогично относительно остальных сторон четырёхугольника $A^*B^*C^*D^*$, доказываем, что и остальные его стороны гомотетия g переводит в соответствующие стороны четырёхугольника $ABCD$, т. е. $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$ гомотетичны.

Доказываем. **II.4.** Пусть точки K, M, P, T являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. а) Докажите, что $KMPT$ — квадрат. б) Укажите преобразование, которое переводит $KMPT$ в $ABCD$. в) Чему равны отношения периметров и площадей квадратов $KMPT$ и $ABCD$?

Решение. а) Пусть точка O — центр квадрата. При последовательных четырёх поворотах квадрата с центром в точке O на углы в 90° квадрат самосовмещается, его стороны переходят друг в друга, а также середины сторон — в середины сторон. Поэтому четырёхугольник $KMPT$ самосовмещается при таких поворотах, а значит, он составлен из четырёх равных друг другу равнобедренных прямоугольных треугольников, т. е. является квадратом.

б), в) Квадраты $KMPT$ и $ABCD$ (как и любые два квадрата) подобны. Коэффициент их подобия равен отношению их сторон, т. е. $1 : \sqrt{2}$. Таково же и отношение их периметров, а площади относятся как 1 : 2. Подобие, преобразующее $ABCD$ в $KMPT$, является композицией поворота на 45° вокруг точки O и гомотетии с центром в этой точке и коэффициентом $1 : \sqrt{2}$.

Исследуем. **II.5.** Сторонами треугольника KMP являются средние линии треугольника ABC. а) Какое преобразование переводит треугольник KMP в треугольник ABC? б) Чему равны отношения периметров и площадей треугольников KMP и ABC?

Решение. а) Треугольники KMP и ABC имеют общий центр масс O. Треугольник KMP переводится в треугольник ABC гомотетией с центром O и коэффициентом –2. б) Отношение периметра треугольника ABC к периметру треугольника KMP равно 2, а отношение их площадей равно 4.

II.6. а) Нарисуйте правильный шестиугольник $ABCDEF$ и соедините последовательно середины его сторон. Получившийся шестиугольник обозначьте P. б) Докажите, что шестиугольник $ABCDEF$ подобен шестиугольнику P, и найдите их коэффициент подобия. в) Укажите преобразование, которое переводит шестиугольник P

в *ABCDEF*. г) Чему равны отношения периметров и площадей шестиугольников *P* и *ABCDEF*?

Решение. Задача решается так же, как и задача II.4. б), г) Коэффициент подобия *ABCDEF* и *P*, как и отношение периметров *P* и *ABCDEF*, равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а отношение площадей шестиугольников *P* и *ABCDEF* равно 3 : 4.

II.7*. Нарисуйте правильный пятиугольник и его диагонали (пентаграмму). Найдите различные пары гомотетичных фигур на этом рисунке, укажите центры этих гомотетий и вычислите их коэффициенты.

Решение. Пусть *ABCDE* — правильный пятиугольник, точка *O* — его центр, *K* — точка пересечения *AC* и *BE*, *L* — точка пересечения *AC* и *BD*, *M* — точка пересечения *BD* и *CE*, *N* — точка пересечения *CE* и *AD*, *P* — точка пересечения *AD* и *BE*. Точка *O* является центром гомотетии пятиугольников *ABCDE* и *KLMNP*. Как доказано в п. 10.5 учебника «Геометрия, 8», отношение *AL*:*LC* является золотым сечением $\Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Обратное ему значение $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Значение Ф — это отношение боковой стороны к основанию в каждом равнобедренном треугольнике с углом при вершине 36°. Такими являются треугольник *ABD* и ещё четыре равных ему треугольника, а также треугольник *AKP* и четыре равных ему треугольника. Положим $AB = a$. Тогда $AL = a$, $LC = \varphi a$ и $KL = \varphi^2 a$. Итак, отношение сторон гомотетичных пятиугольников *ABCDE* и *KLMNP* равно Φ^2, а коэффициентом гомотетии с центром *O*, переводящей *ABCDE* в *KLMNP*, является φ^2.

Гомотетичны также треугольники *ACD* и *AKP* (центр — точка *A*, коэффициент — φ^2), *ABK* и *ECK* (центр — *K*, коэффициент — Ф), *ABK* и *EDC* (центр и коэффициент укажите самостоятельно).

Применяем геометрию. **II.9.** Может ли человек, держа в руках перед собой карманное зеркальце, увидеть себя во весь рост?

Решение. Взяв в руки зеркальце, вы, конечно, сразу убедитесь, что не сможет. Дадим этому объяснение. Вы держите зеркальце в руках перед лицом, и его поверхность вертикальна. Тогда в зеркальце вы увидите своё лицо. Чтобы увидеть в зеркальце свои ступни, вам придётся его поверхность наклонить на некоторый угол (около 45°), но тогда лица в зеркальце вы не увидите. В чём же дело? А в том, что ваши глаза, само зеркальце и отражение предмета должны находиться на одной прямой. А отражение каждой точки в зеркальце получено осевой симметрией относительно прямолинейной поверхности зеркальца: если зеркальце вертикально держать перед лицом, то видно лицо, а ног не видно, если же его наклонить, то будут видны ноги, а лица видно не будет. Сделайте рисунки!

Применяем компьютер. **II.10.** Дана прямая *a* и две точки *A* и *B* по одну сторону от неё. Постройте такую точку *C* на прямой *a*, что длина ломаной *ACB* минимальна.

Указание: для измерения длины ломаной измерьте длину каждого звена, а затем сложите на встроенном в «Живую геометрию» калькуляторе. Для обоснования корректности построения воспользуйтесь симметрией относительно прямой *a*.

Глава III. Геометрия круга

§ 11. Хорды, касательные, секущие

11.1. Свойства хорд

Дополняем теорию. **11.1.** В круге проведена хорда. Рассмотрим такие величины: R — радиус круга, d — длина хорды, h — расстояние от центра круга до хорды, φ — угол, под которым хорда видна из центра.

а) Пусть известны R и h. Как найти d и φ? Выразите их через R и h.

б) Выберите любые две из этих величин и выразите через них остальные.

Указание. По теореме Пифагора $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + h^2 = R^2$. По теореме косинусов

$$\cos\varphi = (2R^2 - d^2) : 2R^2.$$

Представляем. **11.2.** Найдите множество середин хорд данной окружности, имеющих длину a.

Ответ. Окружность, концентрическая с данной окружностью, у которой радиус r удовлетворяет равенству $r^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{4}$, где R — радиус данной окружности.

11.3. Дана прямая. Найдите множество центров окружностей радиуса R, высекающих на данной прямой хорду длины a.

Решение. Если $a = 2R$, то искомое множество — данная прямая. Если $a < 2R$, то множество центров — это две прямые, параллельные данной прямой и удалённые от неё на расстояние $d = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. Если неравенство $a > 2R$, то таких окружностей нет.

11.4. Дан выпуклый угол (не развёрнутый). На какой линии располагаются центры окружностей, высекающих на его сторонах равные хорды?

Решение. Центры таких окружностей равноудалены от сторон угла, а потому лежат на его биссектрисе.

Ответ. Центры заполнят биссектрису угла, исключая вершину угла.

Планируем. **11.5.** Две окружности пересекаются в двух точках. Радиусы окружностей и расстояние между их центрами известны. Как вычислить длину их общей хорды?

Указание. Половина их общей хорды — это высота треугольника, сторонами которого являются радиусы окружностей и отрезок, соединяющий их центры. Задачу о нахождении высоты треугольника, стороны которого известны, уже решали.

Доказываем. **11.10.** Из точки A данной окружности проведены две равные хорды AB и AC. Докажите, что хорда BC перпендикулярна диаметру, выходящему из точки A.

Решение. Этот диаметр идёт по биссектрисе угла BAC, а потому перпендикулярен основанию BC равнобедренного треугольника BAC.

Применяем геометрию. **11.11.** На земле по окружности заданного радиуса расставляют столбы на равных расстояниях друг от друга. Известны радиус круга и расстояния между соседними столбами. Как вычислить расстояния между столбами, идущими через один? между любыми столбами?

Указание. Вычисление расстояний сводится к вычислению основания равнобедренного треугольника, боковые стороны которого являются радиусами окружности, а величина угла при вершине известна.

11.2. Касание прямой и окружности. Взаимное расположение прямой и окружности

Дополняем теорию. **11.13.** Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC (точки B и C — точки касания). Докажите, что $AB = AC$.

Решение. Прямоугольные треугольники OAB и OAC равны (по общей гипотенузе OA и равным катетам OB и OC). Поэтому равны и их другие катеты: $AB = AC$.

Расстояние между двумя фигурами — это длина самого короткого (кратчайшего) отрезка, соединяющего точки этих фигур.

Планируем. **11.15.** Как найти на плоскости расстояние: а) от точки до окружности; б) между прямой и окружностью, не имеющими общих точек?

Решение. а) Пусть заданы точка A и окружность F с центром O и радиусом R. Проведём луч OA и пусть B — точка пересечения OA с F. Тогда AB — расстояние от A до F. Действительно $AB < AC$ для любой точки C окружности F, отличной от точки B. Если $AO > R$, то $AO = AB + R$ и $AO < AC + R$. Поэтому $AB < AC$. Если $AO < R$, то $AC > R - OA = AB$.

б) Пусть заданы прямая a и окружность F с центром O и радиусом R. Из центра O опустим на a перпендикуляр OA и обозначим через B точку его пересечения с окружностью F. Тогда AB — расстояние от A до F: любая точка C окружности F, отличная от точки B, удалена от прямой a больше, чем на расстояние AB.

Вычисляем. **11.18.** В круге радиусом R проведена хорда длины a и параллельные ей касательные к кругу прямые. Найдите расстояния от хорды до касательных.

Решение. Пусть в круге с центром O задана хорда KM длины a и AB — перпендикулярный ей диаметр. Пусть точка C — точка пересечения AB и KM — лежит на OA. Искомые расстояния — это длины отрезков CA и CB: $CA = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, $CB =$

$$= R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Доказываем. **11.19.** Докажите, что касательные прямые, проведённые через концы диаметра окружности к этой окружности, параллельны.

Решение. В плоскости две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

11.20. Прямая a касается двух окружностей в точках A и B. Докажите, что их радиусы, проведённые в эти точки, параллельны.

Решение. Радиусы окружностей перпендикулярны одной прямой a, а потому параллельны.

Представляем. **11.21.** На плоскости через фиксированную точку некоторой прямой проводятся всевозможные окружности, касающиеся этой прямой. Какую фигуру заполнят центры этих окружностей?

Ответ. Центры заполнят всю прямую, перпендикулярную данной прямой, за исключением заданной на ней точки.

11.22. Какую фигуру заполнят центры окружностей, касающиеся двух параллельных прямых?

Ответ. Прямую, лежащую в полосе между этими параллельными прямыми на равном расстоянии от них.

11.23. Через всевозможные точки некоторой окружности проводят касательные прямые к этой окружности. Какую фигуру заполнят эти прямые?

Ответ. Всю плоскость, из которой удалены внутренние точки круга, ограниченного заданной окружностью.

Исследуем. **11.24.** Из точки A проведены к окружности радиусом R с центром O две касательные AB и AC (B и C — точки касания). Обозначим $\angle BAC$ через φ. а) Как, зная R и AO, найти φ и BC? б) Как, зная φ и AO, найти R? в) Пусть AO возрастает, R постоянно. Как изменяется φ? г) Пусть R растёт, AO постоянно. Как изменяется φ?

Решение. а) Решить прямоугольный треугольник OAB, в котором известен катет $OB = R$ и острый угол $OAB = 0{,}5\varphi$; б) решить тот же треугольник OAB по гипотенузе OA и острому углу $0{,}5\varphi$; в) φ убывает; г) φ возрастает.

Строим. **11.25.** Внутри угла задана точка. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку.

Решение. Пусть внутри угла kl с вершиной O задана точка A. Возьмём любую точку B на биссектрисе b угла kl и построим окружность F с центром B, касающуюся сторон угла kl. Луч OA пересекает F в двух точках M и P. Гомотетии с коэффициентами $OA : OM$ и $OA : OP$ с центром O переведут окружность F в две окружности, проходящие через точку A и касающиеся сторон угла kl.

11.3. Градусная мера дуги окружности

Представляем. **11.26.** На дуги какой градусной меры разбиты: а) круглые циферблаты часов; б) компас? Приведите сами аналогичные примеры.

Ответ. а) Минутами окружность разбита на дуги в 6°. б) В простейшем случае на дуги по 45°.

11.27. Из точки проводятся две касательные к окружности. Объясните, почему при удалении точки от окружности градусная мера ближайшей к этой точке дуги окружности между точками касания увеличивается.

Решение. Рассмотрим окружность F с центром O и радиусом R. Возьмём на окружности точку A и проведём луч OA. На этом луче возьмём точку X дальше точки A ($OX > OA$) и проведём из точки X касательные XB и XC к окружности F (B и C — точки касания). Угол BXC обозначим через φ. В четырёхугольнике $OBXC$ углы B и C — прямые, а угол BOC равен $180° - \varphi$. Поэтому и градусная мера дуги BC, соответствующей этому углу, равна $180° - \varphi$. Будем увеличивать расстояние OX. Тогда φ уменьшается, а разность $180° - \varphi$ увеличивается.

***Вычисляем.* 11.28.** Отрезки CA и CB касаются некоторой окружности в точках A и B. Найдите градусную меру дуги AB, если $\angle ACB = \varphi$.

Ответ. $180° - \varphi$.

11.29. В угол φ вписана окружность. Каково отношение градусных мер дуг этой окружности с концами в точках касания. Как изменяется это отношение при изменении угла φ? При каком угле φ это отношение равно 2?

Решение. Градусные меры дуг равны $180° + \varphi$ и $180° - \varphi$. Когда φ возрастает, их отношение $\frac{180° + \varphi}{180° - \varphi}$ возрастает, так как оно равно сумме $1 + \frac{2\varphi}{180° - \varphi}$, в которой второе слагаемое возрастает. Это отношение равно 2, когда $\varphi = 60°$.

***Доказываем.* 11.30.** Докажите, что у одного и того же круга равны две дуги, заключённые между: а) двумя параллельными хордами; б) касательной и параллельной ей хордой.

Решение. а) Проведём через центр круга прямую, перпендикулярную этим хордам. Симметрия относительно этой прямой совместит рассматриваемые дуги, а потому они равны.

б) Решение аналогично: рассматриваем осевую симметрию относительно прямой, проходящей через точку касания и перпендикулярную касательной.

***Исследуем.* 11.31.** Часы показывают ровно 3 ч. Какова градусная мера дуги, которую пройдёт конец минутной стрелки за то время, пока она нагонит часовую?

Решение. Часовая стрелка обходит весь круг за 12 ч, а минутная — за 1 ч. Поэтому скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой стрелки. Пусть x — угол, на который повернётся часовая стрелка после 3 ч за некоторое время. За это же время минутная стрелка повернётся на угол $12x$. Так как в момент, когда минутная стрелка догонит часовую, пройденный ею угол больше угла, пройденного часовой стрелкой, на 90° от 3 ч, то $12x = 90° + x$. Поэтому $x = \left(\frac{90}{11}\right)^{\circ}$, а $12x = \left(98\frac{2}{11}\right)^{\circ}$.

11.4. Измерение вписанных углов

***Дополняем теорию.* 11.32.** Докажите, что угол между хордой окружности и её касательной измеряется половиной дуги, стягиваемой этой хордой.

Решение. Рассмотрим окружность F с центром O, её хорду AB и касательную прямую p в точке A. Если AB — диаметр, то стягиваемые им дуги имеют градусную меру 180°, а хорда AB перпендикулярна прямой p и утверждение задачи справедливо, так как $180° : 2 = 90°$. Пусть хорда AB — не диаметр. Проведём диаметр AC. Он перпендикулярен прямой p. Если 2φ — градусная мера меньшей дуги, стягиваемой хордой AB, то градусная мера меньшей дуги BC равна $180° - 2\varphi$, а вписанный угол CAB измеряется половиной этой дуги, т. е. равен $90° - \varphi$. Но острый угол между хордой AB и касательной прямой p будет дополнительным к углу CAB, а потому равен φ, т. е. этот угол измеряется половиной меньшей дуги, стягиваемой хордой AB.

Вычисляем. **11.37.** Даны окружность радиусом 2 и на ней точка B. Чему равна длина хорды AC этой окружности, если угол ABC равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°?

Решение. Если угол ABC — острый, то точку B можно взять так, чтобы отрезок AB был диаметром. Тогда треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом C, гипотенуза AB которого равна 4 и задан острый угол B. Находим его противолежащий углу B катет AC: а) 2; б) $2\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}$. г) Если угол ABC — прямой, то AC — диаметр и $AC = 4$. д) Если $\angle ABC = 120°$, то возьмём точку K на второй дуге, стягиваемой хордой AC, и получим, что $\angle AKC = 60°$, а $AC = 2\sqrt{3}$.

Доказываем. **11.39.** Глядя на рисунок 195 и вспоминая решение задачи 11.35, сформулируйте и докажите следующие теоремы:

а) об измерении угла, вершина которого лежит внутри круга (см. рис. 195, *в*);

б) об измерении угла, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают окружность круга (см. рис. 195, *а*, *б*);

в) об измерении угла, одна сторона которого касается окружности, а другая пересекает окружность (см. рис. 195, *г*);

г) об измерении угла, обе стороны которого касаются окружности (см. рис. 195, *д*).

Ответ. а) Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг этого круга, одна из которых заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями его сторон.

б) Угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают окружность круга, измеряется полуразностью двух дуг, заключённых между его сторонами.

в) Угол, одна сторона которого касается окружности, а другая пересекает окружность, измеряется полуразностью дуг, заключённых между его сторонами.

г) Угол, обе стороны которого касаются окружности, измеряется полуразностью двух дуг, на которые точки касания разбивают окружность.

Доказательство. а) Пусть вершина M угла ab лежит внутри круга P, а его стороны пересекают окружность F круга P соответственно в точках A и B. Прямая MA пересекает окружность F ещё в некоторой точке C, а прямая MB пересекает F ещё в некоторой точке D. Угол AMB — внешний угол треугольника MBC, и он равен сумме углов B и C этого треугольника. А вписанные углы B и C измеряются половинами дуг круга, о которых идёт речь в утверждении а).

б) Пусть вершина M угла ab лежит вне круга P. Пусть его сторона a пересекает окружность F круга P в точках A и C (точка C лежит между M и A), а сторона b пересекает F в точках B и D (D лежит между M и B). Угол M треугольника MAD равен разности внешнего угла ADB этого треугольника и его угла A. А эти вписанные углы ADB и DAC измеряются половинами дуг круга, о которых идёт речь в утверждении б).

в) Пусть вершина M угла ab лежит вне круга P. Пусть его сторона a пересекает окружность F круга P в точках A и C (точка C лежит между M и A), а сторона b касается F в точке B. Угол M треугольника MBC равен разности внешнего угла ACB этого треугольника и его угла B. Вписанный угол ACB измеряется половиной дуги AB, а угол B измеряется половиной дуги BC (задача 11.32), откуда получим утверждение задачи.

г) Пусть вершина M угла ab лежит вне круга P, а его стороны касаются окружности F круга P соответственно в точках A и B. Проведём любой луч внутри угла ab из его вершины M и воспользуемся предыдущим утверждением два раза, откуда следует утверждение задачи.

Исследуем. **11.40.** Верно ли утверждение: если из точки на окружности две её хорды видны под равными углами, то эти хорды равны? Верно ли обратное утверждение?

Решение. Две хорды одной окружности, которые видны из некоторой точки окружности под равными углами, стягивают дуги одной и той же градусной меры, а потому равны. Обратное утверждение неверно: в качестве примера возьмём две равные и параллельные хорды AB и KM и точку C на меньшей из дуг, стягиваемых хордой AB. Углы KCM и ACB не равны.

11.41. Верно ли, что большая хорда окружности из данной точки на этой окружности видна под большим углом? Верно ли обратное утверждение?

Решение. Оба утверждения неверны: рассмотрите семейство параллельных хорд одной окружности и одну из середин стягиваемых ими дуг.

11.5. Произведения отрезков хорд и секущих

Вычисляем. **11.42.** На рисунке 201 изображена полуокружность с диаметром AB. Найдите x.

Решение. Применяем свойства прямоугольного треугольника ABC, гипотенуза AB которого является диаметром окружности: $CD^2 = AD \cdot CD$ (рис. 201, *а—в*) и $AC^2 = AB \cdot AD$ (рис. 201, *г—е*). а) $x^2 = 16 \cdot 9$; $x = 12$; б) $12x = 36$; $x = 3$; в) $9x \cdot 4x = 144$; $x = 2$; г) $x^2 = 1 \cdot 4$; $x = 2$; д) $144 = (4 + x) \cdot 4$; $x = 32$; е) $36 = (x + 16) \cdot x$; $x = 2$.

11.43. Расстояние от точки M внутри круга радиуса R до его центра равно a. Найдите, чему равно произведение отрезков хорд этого круга, проходящих через точку M.

Решение. Отрезки диаметра, проходящего через точку M, на которые разбивает его эта точка, равны $R - a$ и $R + a$. Их произведение равно $R^2 - a^2$.

11.44. Расстояние от точки M вне круга радиуса R до его центра равно a. Найдите, чему равно произведение отрезков секущих этого круга, идущих из точки M.

Решение. Если из точки M провести секущую через центр круга, то отрезки такой секущей равны $a - R$ и $a + R$. Их произведение равно $a^2 - R^2$.

11.45. Хорда AB, проходящая через точку M некоторого круга, повернулась вокруг точки M так, что отрезок AM увеличился в 2,5 раза. Как изменился отрезок BM?

Решение. Так как произведение отрезков AM и BM не изменилось, то отрезок BM уменьшился в 2,5 раза.

11.46. Секущая, идущая из точки M и пересекающая окружность в точках A и B, повернулась вокруг точки M так, что её внешний отрезок AM уменьшился в три раза. Как изменился отрезок BM?

Ответ. Отрезок BM увеличился в три раза.

11.47. Из точки M проведены к одной окружности касательная MC (C — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B (B лежит на MA). Найдите MA и MC, если $MA + MC = 30$ и MB на 4 меньше MC.

Решение. Пусть $MA = x$, а $MC = y$. Тогда $MB = y - 4$. Имеем систему двух уравнений:

$$x + y = 30 \text{ и } y^2 = x(y - 4).$$

Из неё получаем квадратное уравнение $y^2 - 17y + 60 = 0$. Получаем два решения: $MC = 12$, $MA = 18$ и $MC = 5$, $MA = 25$.

Планируем. **11.48.** Как построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой?

Решение. Пусть заданы точки A и B и прямая p. Ясно, что решение существует лишь в том случае, когда эти точки не лежат по разные стороны от прямой p и обе не лежат на прямой p. Возможны такие случаи:

1) Одна из точек, например точка A, лежит на прямой p. Тогда центр O искомой окружности является точкой пересечения серединного перпендикуляра a отрезка AB и прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой p.

2) Прямая AB параллельна прямой p. Пусть C — точка пересечения p и a, где a — серединный перпендикуляр отрезка AB. Тогда центром O искомой окружности является точка пересечения прямой a с серединным перпендикуляром отрезка AC.

3) Прямая AB пересекает прямую p в некоторой точке M. Если K — точка касания p и искомой окружности, то $MK^2 = MA \cdot MB$. Так как отрезки MA и MB известны, то MK, а значит, и точку K можно построить. Центр O — это точка пересечения серединных перпендикуляров отрезков AB и AK.

Доказываем. **11.49.** Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что касательные, проведённые к ним из любой точки прямой AB (вне отрезка AB), равны.

Решение. Пусть точка X лежит на прямой AB вне отрезка AB, а XK и XM — две касательные, проведённые из точки X к данным окружностям. Тогда $XK^2 = XA \cdot XB$ и $XM^2 = XA \cdot XB$, а потому $XK = XM$.

11.50. Точка B лежит на отрезке AC. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Касательная прямая в точке B к меньшей окружности пересекает большую окружность в двух точках — M и P. Из точки C к меньшей окружности проведена касательная CK. Докажите, что $CM = CK$.

Решение. В прямоугольном треугольнике AMC отрезок MB — высота на гипотенузу, а BC — проекция катета MC на гипотенузу AC. Поэтому $MC^2 = AB \cdot BC$. Но и $CK^2 = AC \cdot BC$. Поэтому $CK^2 = MC^2$ и $CK = MC$.

11.51. К окружности радиуса R проведены две параллельные касательные прямые a и b. Через точку C этой окружности проведена к ней третья касательная прямая c, которая пересекает прямые a и b в точках A и B. Докажите, что $AC \cdot BC = R^2$.

Решение. Пусть точка O — центр заданной окружности. Тогда лучи AO и BO — биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых a и b и секущей c. Так как сумма этих углов равна 180°, то сумма их половин равна 90°, а значит, треугольник ABO — прямоугольный с прямым углом O. Радиус OC в этом треугольнике является высотой, а потому $OC^2 = AC \cdot BC$, т. е. $AC \cdot BC = R^2$.

Применяем геометрию. **11.52.** а) Как далеко видна поверхность Земли со спутника, находящегося над Землёй на высоте 200 км? Радиус Земли приблизительно равен 6370 км.

б) Решите аналогичную задачу о самолёте, летящем на высоте 10 км.

Решение. Радиус Земли будем считать равным 6400 км. Центр Земли обозначим через O, спутник — через A, через B — некоторую точку на поверхности Земли, в которой луч AB касается земной поверхности, и через C — точку, в которой отрезок OA пересекает земную поверхность. Требуется найти длину отрезка AB и длину дуги BC. В прямоугольном треугольнике OAB гипотенуза OA = 6600 км, а катет OB = 6400 км. Обозначим через φ угол AOB. Тогда $\cos\varphi = \dfrac{32}{33} \approx 0{,}97$ и $\varphi \approx 14°$. Следовательно, $AB \approx 6600\sin 14° \approx 1600$ км и $\smile BC \approx 1460$ км.

11.6. Взаимное расположение двух окружностей

Дополняем теорию. **11.53.** Две окружности пересекаются. Докажите, что их линия центров является серединным перпендикуляром их общей хорды.

Решение. Обе окружности симметричны относительно их линии центров. При симметрии относительно линии центров точки пересечения этих окружностей перейдут друг в друга. Поэтому они симметричны относительно линии центров, а потому линия центров является серединным перпендикуляром соединяющего их отрезка.

Представляем. **11.55.** Две окружности касаются. Укажите наиболее удалённые точки этих окружностей.

Ответ. Те точки (отличные от точки касания), по которым пересекает окружности их линия центров.

11.56. Одна окружность катится по другой (неподвижной). По какой линии движется её центр?

Ответ. По окружности F, концентричной с неподвижной окружностью. Если движущаяся окружность внешним образом касалась с неподвижной, то радиус окружности F равен сумме радиусов исходных окружностей. В противном случае он равен разности их радиусов.

11.57. Радиусы двух окружностей 2 и 4. Как расположены окружности, если расстояние между их центрами равно: а) 7; б) 6; в) 5; г) 4; д) 3; е) 2; ж) 1?

Ответ. а) Ограниченные ими круги не имеют общих точек; б) касаются внешним образом; в), г), д) пересекаются; е) касаются внутренним образом; ж) окружности не имеют общих точек, и окружность меньшего радиуса лежит внутри круга, ограниченного окружностью большего радиуса.

11.58. На сколько частей могут разбить плоскость две окружности?

Ответ. На три или на четыре части.

Планируем. **11.59.** Две окружности пересекаются. Известны их радиусы и расстояние между их центрами. а) Как найти длину их общей хорды? б) Как найти угол между их касательными в точке их пересечения?

Решение. Пусть окружности имеют центры O и P и общие точки A и B. а) Длина общей хорды двух окружностей равна удвоенной высоте треугольника OPA, которая проведена из вершины A. Стороны треугольника OPA заданы. б) Этим углом будет угол между прямыми, перпендикулярными к сторонам OA и PA. Такой угол либо равен углу OAP, либо в сумме с ним даёт 180°. Угол OAP находится по теореме косинусов.

11.60*. Как построить три равные окружности, касающиеся изнутри заданной окружности, каждая из которых касается двух других?

Решение. Пусть задана окружность F с центром O и радиусом R. Через x обозначим радиус искомых трёх окружностей. Их центры являются вершинами равностороннего треугольника со стороной $2x$. Расстояние от точки O до вершин этого треугольника равно $\frac{2}{3}x\sqrt{3}$. Далее, $R = x + \frac{2}{3}x\sqrt{3}$. Поэтому $x = R(2\sqrt{3} - 3)$ и $\frac{2}{3}x\sqrt{3} =$ $= 4R - 2R\sqrt{3}$. Строим два равнобедренных треугольника с вершиной O, боковыми сторонами $\frac{2}{3}x\sqrt{3}$ и основаниями $2x$: их вершины при основаниях и являются центрами искомых окружностей.

Доказываем. **11.61.** Две окружности касаются в точке A. Докажите, что их касательные в этой точке совпадают.

Решение. Радиусы окружностей, проведённые в точку A, лежат на одной прямой p. Прямые, проведённые через точку A и перпендикулярные прямой p, совпадают.

Исследуем. **11.62.** На сколько частей могут разбить плоскость три окружности?

Ответ. Максимальное число частей — восемь, минимальное — четыре.

§ 12. Вписанные и описанные окружности

12.1. Окружность, описанная вокруг многоугольника

Дополняем теорию. **12.1.** Пусть a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $S = \frac{abc}{4R}$.

Решение. Если в формулу $S = 0{,}5ab\sin C$ подставить $\sin C = \frac{c}{2R}$, то получим $S = \frac{abc}{4R}$.

12.2. Докажите, что во вписанном четырёхугольнике суммы противоположных углов равны 180°. Верно ли обратное утверждение? Вокруг какой трапеции можно описать окружность?

Решение. Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Тогда сумма его углов A и C измеряется полусуммой дуг BCD и BAD, составляющих полную окружность, а потому равна 180°.

Свойство это является характерным, т. е. справедливо и обратное ему утверждение: ***если сумма противоположных углов четырёхугольника равна* 180°*, то вокруг***

четырёхугольника можно описать окружность (*признак вписанного четырёхугольника*)**.**

 Пусть сумма углов A и C четырёхугольника $ABCD$ равна 180°. Заметим, во-первых, что и сумма двух других противоположных углов этого четырёхугольника равна 180°, а во-вторых, что четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый (у невыпуклого четырёхугольника один из углов больше 180°). Проведём через три его вершины B, C и D окружность F и покажем, что четвёртая его вершина A также лежит на F. Допустим противное. Тогда возможны два случая: 1) A лежит внутри круга, ограниченного F; 2) A лежит вне этого круга.

Рассмотрим первый случай. Продолжим тогда сторону BA за точку A до пересечения с окружностью F в точке M и проведём хорду MD. Четырёхугольник $BCDM$ вписан в окружность F. Как доказано, $\angle C + \angle M = 180°$. Но $\angle A > \angle M$ (как внешний угол треугольника DMA), а значит, $\angle A + \angle C > 180°$. Получили противоречие. Следовательно, точка A не может лежать внутри круга, ограниченного окружностью F.

К противоречию во втором случае приходим аналогично. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность F.■

Итак, ***для того чтобы четырёхугольник можно было вписать в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов была равна 180°***.

Если вокруг трапеции описана окружность, то основания трапеции — параллельные хорды окружности. Дуги окружности между такими хордами равны. А потому равны и боковые стороны трапеции. Итак, вокруг трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

***Вычисляем.* 12.3.** Найдите радиус окружности, описанной вокруг: а) прямоугольного треугольника с гипотенузой c; б) правильного треугольника со стороной a; в) равнобедренного треугольника с основанием 12 и боковой стороной 10; г) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной c; д) равнобедренного треугольника, площадь которого равна S, а угол при основании равен φ.

Решение. Во всех случаях можно воспользоваться формулой $R = \dfrac{a}{2\sin A}$.

а) $\dfrac{c}{2}$; б) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$; в) синус угла при основании в таком треугольнике равен $\dfrac{4}{5}$, поэтому $R = \dfrac{25}{4}$; г) синус угла при основании в таком треугольнике равен $\sqrt{c^2 - \dfrac{a^2}{4}} : c$, поэтому $R = \dfrac{c^2}{\sqrt{4c^2 - a^2}}$; д) если основание этого треугольника $2a$, то его высота $h = a\operatorname{tg}\varphi$, а боковая сторона $c = \dfrac{a}{\cos\varphi}$. Радиус $R = \dfrac{c}{2\sin\varphi} = \dfrac{a}{2\sin\varphi\cos\varphi}$. Так как $S = a^2\operatorname{tg}\varphi$, то $a = \sqrt{S\operatorname{ctg}\varphi}$ и $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\sin^3\varphi\cos\varphi}}$.

12.4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если: а) $\angle A = 70°$, $\angle B = 50°$, $AB = 8$; б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AB = c$.

Указание. В обоих случаях находится угол, лежащий против заданной стороны треугольника.

Ответ. а) $\frac{8}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{c}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

***Исследуем.* 12.5.** Можно ли восстановить равнобедренный треугольник, если от него остались центр описанной окружности и: а) боковая сторона; б) основание?

Ответ. В обоих случаях можно. В случае а) решение единственно. В случае б) два решения.

12.6. Может ли радиус описанной вокруг треугольника окружности быть: а) меньше каждой его стороны; б) больше каждой его стороны; в) равен каждой его стороне?

Решение. а) Может, например, у равностороннего треугольника; б) может, например, если в окружность радиуса 10 вписать равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны 2; в) не может, так как если две стороны треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равны R, то третья его сторона равна $R\sqrt{3}$.

12.7. В треугольнике все стороны различны. Можно ли узнать, какая из них видна из центра описанной окружности под наибольшим углом?

Решение. Наибольшая хорда видна под наибольшим углом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите случаи остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольников.

12.8. Треугольник лежит внутри круга. Сравните радиус этого круга с радиусом окружности, описанной вокруг треугольника.

Решение. Маленький треугольник может лежать внутри круга, но радиус описанной вокруг него окружности может быть любым числом. Это следует, например, из формулы $R = \frac{a}{2\sin A}$.

12.9. Найдите множество точек на плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Решение. Пусть заданы отрезок AB и некоторый угол α. Ясно, что вершины X любого треугольника AXB, у которого угол в вершине X равен α, принадлежат искомому множеству M. Такие точки X заполнят две симметричные относительно прямой AB дуги окружностей, проходящих через точки A и B и имеющих радиус $\frac{AB}{2\sin\alpha}$. Чтобы построить эти дуги, можно построить на отрезке AB, как на основании, два равнобедренных треугольника с углом α против основания и описать вокруг них окружности. Все остальные точки, не принадлежащие указанным дугам, не принадлежат множеству M (это следует из результатов задачи 11.39). Сегменты, ограниченные отрезком AB и построенными дугами, называют *сегментами, вмещающими данный угол.*

Применяем геометрию. **12.10.** С корабля видны три маяка. Измерениями на корабле получены углы между направлениями на эти маяки. Как определить на карте местонахождение корабля?

Решение. Точка пересечения дуг сегментов, вмещающих полученные углы, определят местонахождение корабля.

12.11. Как, имея в руках маленькую линейку, найти радиус большого круга?

Решение. На окружности этого круга взять три точки A, B, C, расстояния между которыми меньше размеров линейки. Зная эти расстояния, можно найти углы треугольника ABC и радиус описанного вокруг него круга.

12.12. Пластинка имеет форму сегмента круга. Как вычислить его радиус?

Решение. Например, можно так: взять на дуге сегмента точку X и измерить угол AXB, где точки A и B — концы дуги сегмента. Пусть этот угол равен α. Тогда радиус $R = \dfrac{AB}{2\sin\alpha}$.

12.2. Окружность, вписанная в многоугольник

Дополняем теорию. **12.13.** Докажите, что формула $S = pr$ справедлива для любых многоугольников, в которые можно вписать окружность.

Решение. Центр окружности O, описанной вокруг многоугольника P, соединим отрезками с вершинами многоугольника P. Эти отрезки разобьют P на треугольники, у которых основаниями будут стороны многоугольника P, а высотами — радиусы, проведённые в точки касания сторон P с окружностью, вписанной в многогранник. Площадь многоугольника P равна сумме площадей составляющих его треугольников, а потому равна произведению радиуса r на полупериметр p.

12.14. Докажите, что в описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны. Докажите обратное.

Решение. Пусть в четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность F и K, L, M, N — точки касания F со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно. Так как $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$, то $AB + CD = BC + AD$.

Тем самым мы доказали, что *если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны* (*свойство описанного четырёхугольника*).

Для выпуклых четырёхугольников свойство это является характерным, т. е. справедливо и обратное ему утверждение: ***если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность*** (*признак описанного четырёхугольника*). Докажем это утверждение.

Пусть для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выполняется равенство

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (*)$$

Среди окружностей, касающихся сторон AB и AD, найдётся окружность F, касающаяся ещё одной из сторон четырёхугольника $ABCD$ и лежащая в нём. Будем считать, что F касается сторон AB, BC и AD. Покажем, что F касается и стороны CD. Допустим противное. Проведём из точки C луч p, который касается окружности F и пересекает сторону AD в точке K. Получим треугольник CDK. Окружность F вписана в четырёхугольник $ABCK$. Поэтому

$$AB + CK = BC + AK. \qquad (**)$$

Вычитая (**) из (*), получаем, что

$$CD - CK = AD - AK. \qquad (***)$$

Так как $AD - AK = KD$, то равенство (***) приводит к соотношению $CD = CK + KD$, которое противоречит неравенству треугольника. Следовательно, окружность касается и стороны CD, т. е. вписана в четырёхугольник $ABCD$.

Итак, ***для того чтобы в выпуклый четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны.***

***Представляем.* 12.15.** Всегда ли в равнобокую трапецию можно вписать окружность?

Ответ. Нет, только тогда, когда сумма боковых сторон равна сумме оснований.

12.16. Должна ли быть равнобокой трапеция, в которую вписана окружность?

Ответ. Нет, например, трапеция может быть прямоугольной.

***Вычисляем.* 12.17.** Найдите радиус окружности, вписанной в: а) правильный треугольник со стороной a; б) прямоугольный треугольник с катетами a, b; в) равнобедренный треугольник с основанием 10 и боковыми сторонами 13.

Решение. Применяем формулу $S = pr$. Получаем:

а) $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$; б) $ab : (a + b + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2})$; в) $\dfrac{10}{3}$.

12.18. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб с диагоналями a и b.

Решение. Применяем формулу $S = pr$. Получаем $\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

***Планируем.* 12.19.** В треугольник вписана окружность. Как найти её радиус, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона и два угла?

Указание. В обоих случаях следует сначала найти все стороны треугольника, потом найти его площадь, затем найти его полупериметр p и применить формулу $S = pr$.

***Исследуем.* 12.20.** У треугольника совпадают центры вписанной в него и описанной вокруг него окружностей. Что это за треугольник?

Решение. Если соединить этот центр отрезками с вершинами треугольника и с точками касания вписанной окружности, то треугольник разобьётся на шесть равных прямоугольных треугольников с острыми углами 60° и 30°. Следовательно, треугольник равносторонний.

12.3. Замечательные точки треугольника. Окружность Эйлера

12.24. Докажите, что если в треугольнике совпали какие-либо две из его четырёх замечательных точек, то этот треугольник равносторонний.

Решение. В задаче 12.20 мы это уже доказали для случая совпадения центров вписанной и описанной окружностей. Если совпадают центр вписанной окружности и центр масс, то биссектрисы углов такого треугольника являются его медианами, а потому треугольник равносторонний. Если совпадают центр вписанной окружности и ортоцентр, то высоты углов такого треугольника являются его медианами, а потому треугольник равносторонний. Если совпадают центр описанной окружности и ортоцентр, то высотами такого треугольника являются серединные перпендикуляры его сторон, а такой треугольник равносторонний. Если совпадают центр описанной окружности и центр масс, то медианами такого треугольника являются серединные перпендикуляры его сторон, а такой треугольник равносторонний. Наконец, у треугольника, в котором совпадают центр масс и ортоцентр, медианы являются высотами, а такой треугольник равносторонний.

§ 13. Длина окружности и площадь круга

13.1. Измерение длины кривой. Длина окружности

Работаем с формулой. **13.1.** Как следует изменить радиус окружности, чтобы её длина: а) увеличилась в два раза; б) уменьшилась в три раза?

Ответ. а) Радиус увеличить в два раза; б) радиус уменьшить в три раза.

13.2. Как следует изменить радиус окружности, чтобы её длина увеличилась на 1 метр? Зависит ли результат от первоначального радиуса?

Ответ. Радиус следует увеличить на 1 м : 2π. От исходного радиуса результат не зависит.

13.3. Пусть радиус окружности увеличился на 1 м. Как изменилась длина окружности? Зависит ли результат от первоначального радиуса?

Ответ. Длина увеличилась на 2π м для любого исходного радиуса.

Вычисляем. **13.4.** Найдите отношение длин окружностей, описанной вокруг правильного многоугольника и вписанной в него, для: а) треугольника; б) шестиугольника; в) двенадцатиугольника; г) n-угольника.

Решение. г) Это отношение равно отношению радиусов окружностей, т. е. $\dfrac{1}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$.

13.5. Вычислите длину окружности, описанной вокруг: а) прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b; в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b; г) прямоугольника со сторонами a и b; д) равнобокой трапеции с основаниями a и b и боковой стороной c; е) равнобедренного треугольника с основанием a и углом при вершине φ; ж) треугольника со сторонами 4, 5, 6.

Решение. В случаях а), б), г) и е) ответы находятся сразу: а) 5π; б) и г) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; е) $\dfrac{\pi a}{\sin\varphi}$. В случаях в) и ж) сначала ищем косинус угла, лежащего против заданной стороны, а затем по нему находим синус этого угла и используем формулу $2R = \dfrac{a}{\sin A}$. В случае в) $\cos B = \dfrac{a}{2b}$, а в случае ж) косинус угла φ, лежащего против стороны 4, равен $\dfrac{3}{4}$. В случае д), полагая, что в трапеции основание $a > b$, находим косинус острого угла φ трапеции: $\cos\varphi = \dfrac{a-b}{2c}$, находим по теореме косинусов диагональ d трапеции, а затем находим радиус окружности по формуле $\dfrac{d}{2\sin\varphi}$.

13.6. Вычислите длину окружности, вписанной в: а) ромб со стороной a и острым углом α; б) прямоугольный треугольник с катетами a и b; в) равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b; г) равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α.

Решение. Радиусы окружностей находим, деля площадь на полупериметр. Затем умножаем эти радиусы на 2π.

Получаем: а) $\pi a\sin\alpha$; б) $2\pi\dfrac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$; в) $2\pi\dfrac{a\sqrt{b^2-0,25a^2}}{a+2b}$; г) $\pi\dfrac{a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

13.7. Вычислите ширину кольца между двумя концентрическими окружностями, имеющими длины L_1 и L_2. От чего зависит эта ширина?

Решение. Считаем, что $L_1 > L_2$. Ширина равна разности радиусов, т. е. равна $(L_1 - L_2) : 2\pi$. Ширина кольца зависит лишь от разности $L_1 - L_2$.

13.8. Длины двух концентрических окружностей равны 1 и 3. Чему равна длина окружности, концентрической данным и равноудалённой от них?

Решение. Так как радиус «средней» окружности равен полусумме радиусов «крайних», то и длина её равна полусумме длин «крайних».

Ответ. 2.

Оцениваем. **13.9.** Найдите отношение (с точностью до сотых) длины окружности и периметра вписанного в неё правильного: а) шестиугольника; б) десятиугольника; в) двенадцатиугольника; г) двадцатиугольника.

Решение. Решим задачу в общем виде. Если в окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, то его периметр равен $2nR\sin\dfrac{180°}{n}$. Поэтому искомое отношение k равно $\pi : \left(n\sin\dfrac{180°}{n}\right)$. При $n = 6$ имеем $k = \pi : 3 \approx 1,05$, при $n = 10$ $k = \pi : (10\sin 18°) \approx$ $\approx 3,14 : 3,09 \approx 1,02$, при $n = 12$ $k = \pi : (12\sin 15°) \approx 3,14 : 3,11 \approx 1,01$, при $n = 20$ $k =$ $= \pi : (20\sin 9°) \approx 3,14 : 3,12 \approx 1,01$.

Исследуем. **13.10.** Колесо катится по земле. Какая существует зависимость между его радиусом, числом сделанных им оборотов и длиной пройденного пути?

Решение. Колесо радиусом R, сделав n оборотов, пройдёт путь $S = 2\pi Rn$.

13.11. По дороге едет повозка с колёсами разных радиусов. Одно из них крутится быстрее. Какое? Почему? Как узнать, во сколько раз быстрее оно крутится?

Решение. Пусть радиус большего колеса R, а радиус меньшего — r. Пройдя один и тот же путь S, большее колесо сделает n оборотов, а меньшее сделает m оборотов. Так как $S = 2\pi Rn = 2\pi rm$, то $m : n = R : r$.

Применяем геометрию. **13.12.** Два зубчатых колеса сцеплены между собой. Известны их радиусы. а) Пусть одно из них сделало n оборотов. Сколько оборотов сделало другое? б) Пусть есть третье колесо известного радиуса, которое сцеплено с одним из данных колёс. Сколько оборотов оно сделало? Что интересно в полученном результате? в) Представьте, что третье колесо сцеплено с двумя данными колёсами. Сколько оборотов оно сделало?

Решение. а) Пусть радиус первого колеса R, а второго колеса r и оно сделало m оборотов. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, получаем, что $m = nR : r$. б) Если третье колесо радиуса P сделало p оборотов, то, проводя дважды сделанные рассуждения, получим, что $p = nR : P$, т. е. результат не зависит от радиуса второго колеса! в) Но с первым колесом третье колесо сцепить нельзя, так как сцепленные колёса крутятся в разные стороны, и если первое крутится по часовой стрелке, то второе — против, а третье — снова по часовой стрелке, и сцепить его с первым нельзя.

13.13. а) Метр приблизительно равен одной сорокамиллионной длины земного меридиана. Найдите радиус земного шара в метрах.

б) Во сколько раз длина земного экватора больше длины шестидесятой параллели? Изменится ли полученный результат, если такую задачу решать на другой планете?

в) Представьте себе, что Землю обтянули верёвкой по экватору, а потом её длину увеличили на 1 м и получили окружность, концентрическую с экватором. Пролезет ли в образовавшийся зазор кисть руки?

Решение. а) Радиус земного шара равен 40 000 км : $2\pi \approx$ 6472,5 км = 6 472 500 м.

Получившийся зазор равен 1м : 2π, т. е. больше 15 см. В такой зазор рука пролезет!

13.2. Длина дуги окружности

Представляем. **13.14.** Из точки проводятся две касательные к окружности. Объясните, почему при удалении точки от окружности длина ближайшей к этой точке дуги окружности увеличивается.

Решение. Пусть из точки A к окружности с центром O проведены две касательные AB и AC (B и C — точки касания). В четырёхугольнике $ABOC$ углы B и C — прямые, а углы A и O дают в сумме 180°. При удалении точки A от окружности (т. е. при возрастании OA и постоянных OB и OC) угол A в этом четырёхугольнике убывает, а потому центральный угол BOC растёт. Следовательно, растёт градусная мера, а значит, и длина соответствующей ему дуги.

Планируем. **13.15.** Отрезки CA и CB касаются некоторой окружности в точках A и B. Как найти длину дуги AB, зная длину CA и угол ACB? Вычислите её, если $CA = 1$ и $\angle ACB = 120°$.

Решение. Пусть O — центр рассматриваемой окружности. Тогда в прямоугольном треугольнике OAC угол A — прямой, а острый угол C — половина данного угла ACB. Значит, можно найти угол AOC, радиус OA и вдвое больший угла AOC центральный угол AOB и длину дуги AB. Если $CA = 1$ и $\angle ACB = 120°$, то $\angle OCA = 60°$, $OA = \sqrt{3}$, $\angle AOB = 60°$ и длина дуги AB равна $\pi\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13.16. Как найти длину зелёной линии на рисунке 226, зная радиус окружностей?

Решение. Радиусы нарисованных окружностей известны, а потому ищем градусные меры зелёных дуг. Эти меры таковы: в первом случае 240° и 240°; во втором случае — две дуги по 240° и две дуги по 60°.

Вычисляем. **13.20.** Внутри окружности радиуса R расположены три равные окружности, касающиеся друг друга и данной окружности. Найдите их длины и длины дуг, на которые они разбиваются точками касания.

Решение. Пусть O — центр окружности радиуса R, точки A, B, C — центры трёх малых окружностей и K, M, P — точки их касания с большой окружностью. Радиус x малых окружностей найдём из уравнения $R = x + x\frac{\sqrt{3}}{3}$. Треугольник ABC — равносторонний. Поэтому точки K, M, P разбивают большую окружность на дуги по 120°, а малые окружности разбиты на дуги по 60°, 150° и 150°.

13.21. На окружности длиной L взята дуга длиной L_1. Какова её градусная мера φ?

Решение. $L = 2\pi R$, а $L_1 = \pi R\frac{\varphi}{180°}$. Поэтому $\varphi = \frac{L_1}{L}360°$.

13.22. В угол φ вписана окружность. В каком отношении разделилась её длина точками касания? Как изменяется это отношение при изменении угла φ? При каком угле φ это отношение равно 2?

Решение. Согласно результату задачи 11.39, г), точки касания разбивают вписанную окружность на дуги α и $360° - \alpha$, полуразность которых равна φ. Значит, $2\varphi = 360° - 2\alpha$, т. е. $\varphi = 180° - \alpha$. Поэтому отношение

$$(360° - \alpha) : \alpha = (180° + \varphi) : (180° - \varphi).$$

При возрастании угла φ оно возрастает. Оно равно двум при $\varphi = 60°$.

Исследуем. **13.23.** Нарисуйте отрезок AB. Вы хотите наиболее коротким путём попасть из A в B, двигаясь только по полуокружностям, диаметры которых лежат на AB. При этом соседние диаметры не накладываются друг на друга. Какой вы выберете путь?

Решение. Разобьём отрезок AB любой его внутренней точкой C. Так как $\pi AB = \pi AC + \pi CB$, то длина пути не зависит от разбиения отрезка AB.

13.24. Часы показывают 15:00. Как вычислить путь, который пройдёт конец минутной стрелки, пока она догонит часовую?

Решение. Угловая скорость часовой стрелки равна 30° в час. Угловая скорость минутной стрелки равна 360° в час. Скорость сближения стрелок равна 330° в час. Вычисляем путь, пройденный минутной стрелкой. Поэтому её скорость умножаем на время, т. е. 360 умножаем на время 90 : 330. Получаем, что минутная стрелка повернётся на угол, равный 1080 : 11 градусов. Подставив это число и длину стрелки в формулу для длины дуги, получим путь, пройденный концом стрелки.

13.25. Круглая площадка разбита дорожками на секторы (рис. 227 учебника). Вы находитесь на пересечении границы площадки и дорожки. А ваш товарищ находится в другой такой же точке. Как вам побыстрее добраться до него? (Ходить можно только по дорожкам и вокруг площадки.)

Решение. Для ответа на вопрос надо сравнить два числа $2R$ и $\pi R\varphi : 180°$, где R — радиус окружности, а φ — градусная мера дуги данного сектора. Это сравнение сводится к сравнению чисел 360 и $\pi\varphi$: путь выбирается по меньшему из них.

13.3. Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга

Планируем. **13.30.** Как вычислить площадь сектора, если известны: а) радиус круга и длина его дуги; б) длина его дуги и центральный угол; в) длина его границы и центральный угол?

Решение. а), б) Пусть радиус круга R, его угол φ, длина дуги L и площадь S. Тогда $L = \pi R\varphi : 180$ и $S = \pi R^2\varphi : 360$. Из первой формулы найдём, что $\varphi = 180L : (\pi R)$, а затем подставим φ во вторую формулу и получим $S = \frac{1}{2}RL$. Если выразить из первой формулы $R = 180L : (\pi\varphi)$, а затем его подставить во вторую, то получим, что $S = 90L^2 : (\pi\varphi)$. в) Если P — длина границы и φ — угол, а R — радиус, то $P = 2R + (\pi R\varphi : 180)$. Из этого равенства находим R, а затем площадь S.

13.31. В круге известного радиуса проведена хорда. Известен также угол, под которым она видна из центра. Как найти площадь полученных сегментов круга?

Решение. Пусть R — радиус круга с центром O. Заданы его хорда AB и $\angle AOB = \varphi$. Площадь меньшего из сегментов с дугой AB находим, вычитая из площади сектора AOB площадь равнобедренного треугольника AOB. Площадь большего из сегментов — это разность площади круга и площади меньшего из сегментов.

13.32. Дан круг. Как его разбить концентрическими окружностями на 10 равновеликих частей?

Решение. Пусть R — радиус круга с центром O. Если концентрический с ним круг имеет радиус r и его площадь равна, например, $0{,}7\pi R^2$, из уравнения $\pi r^2 = 0{,}7\pi R^2$ находим, что $r = \sqrt{\frac{7}{10}}R$. Такой отрезок можно построить циркулем и линейкой. Строя круги с площадями $0{,}1\pi R^2$, $0{,}2\pi R^2$ и т. д., решаем задачу.

Вычисляем. **13.33.** Вычислите площадь круга, описанного вокруг: а) равностороннего треугольника со стороной a; б) равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a; в) прямоугольного треугольника с катетами a и b; г) равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом при вершине 2α.

Решение. Если R — радиус описанного круга, то: а) $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $R = 0{,}5a$; в) $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; г) угол при основании такого треугольника равен $90° - \alpha$, а потому синус такого угла равен косинусу α и $R = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

Ответ. а) $\frac{\pi}{3}a^2$; б) $\frac{\pi}{2}a^2$; в) $\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$; г) $\frac{\pi a^2}{4\cos^2\alpha}$.

13.34. Вычислите площади кругов, которые вписаны в треугольники, перечисленные в задаче 13.33.

Решение. Если r — радиус вписанного круга, то в случае а) $r = 0{,}5R$, а во всех остальных случаях находим площадь треугольника, его полупериметр, тогда r — частное от деления площади на полупериметр.

Ответ. а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{\pi a^2}{6+2\sqrt{2}}$; в) $\frac{\pi a^2 b^2}{(a+b+\sqrt{a^2+b^2})^2}$; г) $\frac{\pi a^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}$.

13.35. Внутри данного круга проходит окружность, которая разбивает его на равновеликие части. Каково отношение радиусов большой и малой окружностей?

Решение. Так как $r^2 = \frac{1}{2}R^2$, то $r : R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Оцениваем. **13.37.** В круге радиуса R проведена концентрическая с краем круга окружность. Какую часть составляет площадь полученного кольца от площади круга, если радиус проведённой окружности равен: а) $0{,}5R$; б) $0{,}9R$?

Ответ. а) 75%; б) 19%.

Исследуем. **13.38.** Квадрат и круг имеют одинаковую длину границы. Какая из этих фигур имеет большую площадь?

Решение. Если периметр квадрата L, то его сторона $\frac{L}{4}$, а площадь равна $\frac{L^2}{16}$. Если длина окружности круга равна L, то радиус круга равен $\frac{L}{2\pi}$, а его площадь равна $\frac{1}{4\pi}L^2$ и больше площади квадрата, так как $\pi < 4$.

Ответ. Круг.

13.39. Правильный шестиугольник и круг имеют одинаковую длину границы. Какая из этих фигур имеет большую площадь?

Решение. Площадь круга подсчитана в предыдущей задаче и равна $\frac{1}{4\pi}L^2$. Правильный шестиугольник с периметром L составлен из шести правильных треугольников со сторонами $\frac{L}{6}$. Площадь шести таких треугольников равна $\frac{1}{8\sqrt{3}}L^2$ и меньше площади круга, так как $\pi < 2\sqrt{3}$.

Ответ. Круг.

13.40. Квадрат и круг равновелики. У какой из этих фигур длиннее граница?

Решение. Если S — площадь квадрата и круга, то их периметры равны $4\sqrt{S}$ (у квадрата) и $2\sqrt{\pi}\ \sqrt{S}$ (у круга). Поскольку $4 > 2\sqrt{\pi}$ то граница квадрата длиннее.

13.41. Правильный шестиугольник и круг равновелики. У какой из этих фигур длиннее граница?

Решение. Легко посчитать, что периметр правильного шестиугольника с площадью S равен $2\sqrt{2}\ \sqrt{\sqrt{3}}\ \sqrt{S}$ а длина окружности, которая ограничивает круг площади S, равна $2\sqrt{\pi}\ \sqrt{S}$ Квадраты коэффициентов при $\sqrt{S}$ равны $8\sqrt{3}$ и 4π, а так как $8\sqrt{3} > 4\pi$, то граница шестиугольника длиннее.

13.42. Каково должно быть число сторон правильного многоугольника, вписанного в круг, чтобы его площадь составляла от площади круга не менее: а) 90%; б) 95%?

Решение. Площадь S правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R, вычисляется по формуле: $S = nR^2 \sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n}$. Так как отношение площадей при подобии сохраняется, то можно полагать, что $R = 1$. Тогда площадь круга равна π. а) При $n = 10$ имеем $S = 2{,}94$ и $S : \pi \approx 90\%$; б) при $n = 12$ имеем $S = 3$ и $S : \pi \approx 95\%$.

Применяем геометрию. **13.43.** Почему для передачи газа на большие расстояния выгоднее использовать трубы большого диаметра?

Решение. Толщина стенок металлических труб сравнительно мала по отношению к их диаметру, а потому расход металла на изготовление труб растёт приблизительно пропорционально их диаметру, а площадь их сечения растёт приблизительно как квадрат диаметра. Поэтому выгоднее использовать трубы большого диаметра: при одном и том же расходе металла на их изготовление их пропускная способность возрастает.

§ 14. Цилиндр и конус. Сфера и шар

14.1. Цилиндры и конусы

Работаем с формулой. **14.1.** Дан цилиндр с радиусом основания R и высотой H. Как, не изменяя высоты цилиндра, изменить радиус его основания, чтобы удвоилась: а) площадь его боковой поверхности; б) площадь всей поверхности цилиндра?

Решение. а) Следует удвоить радиус его основания.

б) Эта задача сводится к решению квадратного уравнения $2RH + 2R^2 = xH + x^2$.

14.2. Дан конус высотой H и радиусом основания R. Как, не изменяя его высоты, изменить радиус основания конуса, чтобы удвоилась:

а) площадь его боковой поверхности; б) площадь всей поверхности конуса?

Решение. а) Эта задача сводится к решению уравнения $2R(H^2 + R^2)^{0,5} = x(H^2 + x^2)^{0,5}$. б) Уравнение составляется аналогично.

Находим величину. **14.7.** Параллелограмм со сторонами 6 и 8 и углом 150° вращают вокруг стороны 6. Вычислите площадь поверхности полученной фигуры вращения.

Решение. Поверхность этой фигуры вращения состоит из боковой поверхности цилиндра высотой 6 и радиусом основания 4 (её площадь равна 48π) и двух боковых поверхностей конусов с образующими равными 8 и радиусом основания равным 4 (их площади равны по 32π). Суммируя эти площади, получим 112π.

14.8. Равнобокую трапецию с основаниями 12 и 20 и высотой 3 вращают вокруг оси симметрии. Найдите площадь поверхности полученной фигуры вращения.

Решение. Поверхность полученной фигуры вращения (её называют **усечённым конусом**) состоит из двух кругов с радиусами 6 и 10 (их площади 36π и 100π), а также боковой поверхности усечённого конуса с образующей равной 5-ти. Эта боковая поверхность является разностью боковых поверхностей большого конуса с радиусом основания 10 и длиной образующей равной 12,5 (её площадь равна 125π) и меньшего конуса с радиусом основания 6 и длиной образующей равной 7,5 (её площадь равна 45π). В итоге имеем: $(36 + 100 + 125 - 45)\pi$, т. е. 216π.

Доказываем. **14.9.** Докажите, что: а) площадь осевого сечения цилиндра меньше половины площади его боковой поверхности; б) площадь осевого сечения конуса меньше половины площади его боковой поверхности.

Указание. Очевидно, что: а) $2RH < \pi RH$; б) $RH < \frac{1}{2}\pi RL$.

Исследуем. **14.10.** Прямоугольник со сторонами a и b ($a < b$) вращают сначала вокруг одной стороны, а затем вокруг другой. Площадь боковой поверхности какого из получившихся цилиндров больше? А площадь всей поверхности?

Решение. Когда вращаем вокруг стороны a, то получаем боковую поверхность площади $2\pi ab$, а полная поверхность равна $2\pi(ab + b^2)$. Аналогично, при вращении вокруг b имеем $2\pi(ab + a^2)$. Так как $a < b$, то первое больше второго.

14.11. Прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a < b$) вращают сначала вокруг одного катета, а затем вокруг другого. Площадь боковой поверхности какого из получившихся конусов больше? А площадь всей поверхности?

Решение. Пусть c — гипотенуза этого треугольника. Когда вращаем вокруг катета a, то получаем площадь боковой поверхности равную πcb. Она больше площади боковой поверхности при вращении вокруг катета b, которая равна πca. Тем более $\pi(cb + b^2) > \pi(ca + a^2)$.

Применяем геометрию. **14.12.** Как вычислить радиус цилиндрической башни, не подходя к ней?

Решение. Это планиметрическая задача о нахождении расстояния до круга K от точки A вне круга. Если имеется дальномер, то находим сначала расстояние a от A до ближайшей точки круга K, а затем расстояние b до самой дальней точки B: это точка — точка касания. Тогда радиус r и числа a и b связаны равенством $(a + r)^2 = b^2 + r^2$. Возможны и другие решения с другими инструментами.

14.2. Объёмы цилиндра и конуса

Работаем с формулой. **14.14.** Боковая поверхность цилиндра равна S, а образующая равна H. Найдите объём цилиндра.

Решение. Выразим R через S и H и подставим в формулу для объёма V. Получим $V = S^2 : 4\pi H$.

14.15. Площадь основания конуса равна S_0, а площадь его боковой поверхности равна S. Найдите объём конуса.

Решение. Сначала выразим радиус: $R = (S_0 : \pi)^{\frac{1}{2}}$, затем выразим образующую L через S и S_0: $L = S : (\pi(S_0 : \pi)^{\frac{1}{2}})$, а высота $H = (L^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}$. Получим для объёма выражение.

14.16. Развёрткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник со сторонами a и b. Найдите объём этого цилиндра, если его высота равна a.

Решение. Длина окружности основания равна b. Поэтому $b = 2\pi R$. Поэтому $V = ab^2 : 4\pi$.

14.17. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор круга радиуса R, имеющий угол α. Найдите объём конуса.

Решение. Угол α полагаем в радианах. Тогда площадь боковой поверхности $S = \alpha R$. Так как также $S = \pi rR$, где r — радиус основания конуса, то из равенства $\alpha R = \pi rR$ находим r. Высота $H = (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$. Найденные величины подставляем в формулу для объёма конуса и выражаем α в градусах.

Находим величину. **14.21.** Вокруг прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3, 4, 6 описали сначала цилиндр с образующей 6, а затем цилиндр с образующей 4. Найдите их объёмы и сравните их.

Решение. В первом случае диаметр основания цилиндра равен 5, и тогда объём его равен 37,5π. Во втором случае диаметр основания цилиндра равен $3\sqrt{5}$, и тогда объём его равен 45π.

14.22. Ромб с диагоналями 6 и 8 вращают вокруг диагоналей. Найдите объёмы получившихся фигур вращения и сравните их.

Решение. Если вращать ромб вокруг диагонали 6, то получим два конуса с общим основанием радиуса 4 и с высотой 3. Их общий объём равен 32π. Если вращать ромб вокруг диагонали 8, то получим два конуса с общим основанием радиуса 3 и с высотой 4. Их общий объём равен 24π.

14.23. Параллелограмм со сторонами 6 и 8 и углом 150° вращают вокруг стороны 6. Вычислите объём полученной фигуры вращения.

Решение. Эту фигуру уже рассматривали в задаче 14.7. Она представляет собой цилиндр с высотой 6 и радиусом основания 4, на верхнее основание которого сначала подставили конус с тем же основанием и высотой 4, а затем из этого цилиндра удалили такой же конус, но уже имеющий своим основанием нижнее основание цилиндра. Поэтому объём этой фигуры равен объёму цилиндра, т. е. 96π.

14.24. Равнобокую трапецию с основаниями 12 и 20 и высотой 3 вращают вокруг оси симметрии. Найдите объём полученной фигуры вращения.

Решение. Этот усечённый конус тоже рассматривался в задаче 14.8. Его получают отсечением от конуса с радиусом 10 и высотой 7,5 конуса с радиусом 6 и высотой 4,5. Поэтому он равен $\frac{\pi}{3}(750 - 162) = 196\pi$.

14.3. Сфера и шар. Объём шара. Площадь сферы

Работаем с формулой. **14.31.** Из формулы для площади сферы выразите радиус сферы.

Решение. $R = (S:4\pi)^{\frac{1}{2}}$.

14.32. Выразите объём шара через площадь его поверхности.

Решение. $R = (3V:4\pi)^{\frac{1}{3}}$.

14.33. Выразите площадь сферы через объём ограниченного ею шара.

Решение. Согласно 14.31 и 14.32, $(S:4\pi)^{\frac{1}{2}} = (3V:4\pi)^{\frac{1}{3}}$. Поэтому $S = 4\pi(3V:4\pi)^{\frac{2}{3}}$.

Вычисляем. **14.37.** Отношение объёмов двух шаров равно c. Чему равно отношение площадей сфер, ограничивающих эти шары? Как изменится площадь сферы, если объём ограниченного ею шара увеличился вдвое?

Решение. Согласно 14.33, $c4\pi(3V:4\pi)^{\frac{2}{3}} = 4\pi(3V^*:4\pi)^{\frac{2}{3}}$. Поэтому $V^*:V = c^{\frac{2}{3}}$.

14.38. Найдите площадь поверхности полушара радиуса R.

Решение. $2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$.

Оцениваем. **14.41.** Из сплошного металлического шара радиуса R изготовили полый шар, толщина стенок которого $0{,}1R$. Каков его радиус (внешний)?

Решение. Обозначим через r радиус полого пространства внутри нового шара. Тогда условие задачи даёт уравнение:

$$\frac{4}{3}\pi(r+0{,}1R)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Из него получаем квадратное уравнение: $R^2 + Rr - 3{,}3R^2 = 0$. Его положительный корень равен приблизительно $1{,}4R$. А внешний радиус полученного шара равен приблизительно $2{,}4R$.

Доказываем. **14.45.** Докажите, что площадь поверхности цилиндра, образуемого вращением квадрата вокруг стороны, равна площади сферы, имеющей радиусом сторону квадрата.

Решение. И то и другое числа равны $4\pi a^2$, где a — сторона квадрата.

Применяем геометрию. **14.46.** Что бы вы предпочли: съесть арбуз радиуса 15 см вчетвером или съесть арбуз радиуса 20 см ввосьмером?

Решение. Надо от радиусов арбузов отнять по 1 см, так как корки не едят, а затем сравнить $\frac{1}{4}14^3$ и $\frac{1}{8}19^3$. Первое из них равно 686, а второе равно приблизительно 857. Те, кто едят ввосьмером арбуз радиуса 20 см, получат больше, чем те, кто едят вчетвером арбуз радиуса 15 см.

14.47. Диаметр Земли приблизительно в четыре раза больше диаметра Луны. Сравните объёмы Земли и Луны, считая их шарами.

Ответ. Объём Земли в 64 раза больше объёма Луны.

14.48. Вычислите площадь поверхности Земли, считая Землю шаром с радиусом 6378 км. Найдите, сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша, если водой покрыто 75% всей земной поверхности.

Указание. Можно, конечно, возвести в квадрат число 6378, а затем умножить на 4π, но проще посмотреть в географическом справочнике.

Задачи к главе III

Планируем. **III.1.** а) В треугольник вписана окружность. Как узнать, в каком отношении разделилась длина этой окружности точками касания? б) Решите аналогичную задачу для четырёхугольника. в) Решите аналогичную задачу для n-угольника.

Решение. В этой задаче следует использовать теорему о том, что угол, стороны которого касаются окружности, измеряется полуразностью двух дуг, на которые точки касания разбивают окружность (см. решение задачи 11.39, г). Отношение длин дуг окружности равно отношению их градусных мер. Поэтому вычислять надо эти градусные меры. Естественно, считаются известными углы заданных многоугольников.

а) Пусть окружность F касается стороны AB треугольника ABC в точке K, его стороны BC в точке M, а стороны AC в точке P. Градусные меры углов треугольника ABC обозначим α, β, γ, а градусные меры дуг KM, MP и PK обозначим соответственно через x, y, z (имеются в виду дуги, меньшие полуокружности). Тогда

$$2\alpha = x + y - z,\ \ 2\beta = y + z - x,\ 2\gamma = z + x - y.$$

Решая эту систему, получаем, что $x = \alpha + \gamma$, $y = \alpha + \beta$, $z = \beta + \gamma$.

б) Пусть окружность F касается сторон AB, BC, CD, DA четырёхугольника $ABCD$ последовательно в точках K, M, P, T и эти точки разбивают, начиная с точки K, окружность F на дуги x, y, z, t. Градусные меры углов четырёхугольника $ABCD$ обозначаем последовательно через α, β, γ, δ. Тогда пишем четыре линейных уравнения, выражая последовательно α, β, γ, δ через x, y, z, t, и решаем полученную систему четырёх уравнений. Первое из этих уравнений: $2\alpha = x + y + z - t$. Остальные аналогичны.

в) Задача про n-угольник решается аналогично решённым задачам в пунктах а) и б).

III.2. Как построить круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов?

Решение. Пусть радиусы известных кругов — a и b, а радиус искомого круга — c. Тогда $\pi a^2 + \pi b^2 = \pi c^2$. Поэтому c — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b. Отсюда следует построение.

Доказываем. **III.5.** Центр окружности совпадает с центром правильного треугольника, а сама она пересекает стороны треугольника. Докажите, что полученные при этом хорды будут равны.

Доказательство. Повороты на 120° вокруг центра правильного треугольника самосовмещают и сам треугольник, и окружность, и рассматриваемые хорды. Поэтому эти хорды равны друг другу.

III.7. Докажите, что произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон (*теорема Птолемея*). (Клавдий Птолемей (ок. 87—165) — знаменитый древнегреческий астроном и математик, живший в Александрии.)

Доказательство. Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность F. Может оказаться, что его диагонали являются биссектрисами его углов. Тогда $ABCD$ — квадрат и утверждение теоремы очевидно. Допустим, что BD не является биссектрисой угла B. Тогда один из двух углов CBD и ABD меньше другого. Пусть $\angle CBD < \angle ABD$. Положим $\angle CBD = \alpha$ и отложим от стороны BA угла ABD внутрь его угол α. Его вторая сторона пересечёт диагональ AC в некоторой точке P, и отрезок BP рассечёт треугольник ABC на два треугольника ABP и BCP. Треугольник ABP подобен треугольнику DBC, так как $\angle ABP = \angle DBC = \alpha$ и $\angle BAP = \angle BDC$, как углы, опирающиеся на одну дугу BC. Из подобия этих треугольников следует, что

$$AP \cdot BD = AB \cdot CD. \qquad (*)$$

Треугольник BCP подобен треугольнику BDA, так как $\angle CBP = \angle ABD$, как углы, составленные из равных углов, и $\angle BCP = \angle BDA$, как углы, опирающиеся на одну дугу AB. Из подобия этих треугольников следует, что

$$PC \cdot BD = BC \cdot AD. \qquad (**)$$

Так как $AP + PC = AC$, то, складывая равенства (*) и (**), получим $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

3. Тесты к главам учебника

В каждом тесте содержится пять утверждений, на каждое из которых можно дать один из трёх видов ответов: «да» (оно кодируется знаком +), «нет» (оно кодируется знаком –), «не знаю» (оно кодируется знаком 0). За каждый правильный ответ знаками + (плюс) или – (минус) ставится +1, за каждый неправильный ответ этими знаками ставится –1, а за ответ «не знаю» ставится 0. Таким образом, по каждому тесту можно набрать от +5 до –5 баллов.

Тесты к главе I «Векторы и координаты»

Тест 1

(к пунктам 1.2 «Сонаправленность векторов» и 1.3 «Равенство векторов»)

$ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей, точка K — середина его стороны AB, точка L — середина его стороны BC.

Следующие утверждения верны:

1) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OL}$ коллинеарны.
2) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OL}$ сонаправлены.
3) Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{OK}$ сонаправлены.
4) Векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{OL}$ равны.
5) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

Ответы: + + – + –

Тест 2

(к пункту 1.5 «Угол между векторами»)

Основание правильной пирамиды $PABCD$ — квадрат $ABCD$, её боковые грани — равносторонние треугольники и O — точка пересечения диагоналей основания.

Следующие утверждения верны:

1) Угол между векторами $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 45°.
2) Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BP}$ равен 60°.
3) Векторы $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{PD}$ ортогональны.
4) Угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 45°.
5) Угол между векторами $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{PO}$ равен 45°.

Ответы: + – + + –

Тест 3

(к § 2 «Сложение и вычитание векторов»)

Точка M — середина стороны AB треугольника ABC, точка K — середина его стороны BC и точка P — середина стороны AC, а O — точка пересечения отрезков AK и MP.

Следующие утверждения верны:

1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

2) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{KC}$.

3) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK}$.

4) $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{OP}$.

5) Векторы $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KO}$ противоположны.

Ответы: + + – – +

Тест 4

(к § 3 «Умножение вектора на число»)

Основанием пирамиды *PABCD* является параллелограмм *ABCD*, точка *O* — точка пересечения его диагоналей.

Следующие утверждения верны:

1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO}$.

2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO}$.

3) $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{PC}$.

4) $2\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BP}$.

5) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Ответы: + – + + +

Тест 5

(к п. 4.1 «Векторная алгебра и векторный метод»)

Следующие утверждения верны:

1) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AX}$ сонаправлены тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB}$, где $\alpha > 0$.

2) Точка *X* лежит на прямой *AB* тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB}$, где $\alpha > 0$.

3) Точка *X* принадлежит отрезку *AB* тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB}$, где $0 \le \alpha \le 1$.

4) *ABCD* — параллелограмм. Точка *X* принадлежит параллелограмму *ABCD* тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC}$, где $0 \le \alpha \le 1$ и $0 \le \beta \le 1$.

5) *AOB* — угол. Точка *X* лежит внутри угла *AOB* тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Ответы: + – + + +

Тест 6

(к пунктам 5.2 «Векторы на координатной плоскости» и 5.3 «Действия с векторами в координатной форме»)

Следующие утверждения верны:

1) Если координаты вектора увеличились, то модуль его увеличился.

2) Если координаты вектора разделили на одно и то же число, то его модуль разделился на это же число.

3) Если угол между вектором $(x; y)$ постоянной длины и единичным вектором оси Ox возрастает, то его координата x убывает.

4) Если угол между вектором $(x; y)$ постоянной длины и единичным вектором оси Ox возрастает, то его координата y возрастает.

5) Если модули координат вектора уменьшились, то модуль вектора уменьшился.

Ответы: – + + – +

Тест 7

(к пункту 5.4 «Метод координат. Уравнения окружности и прямой»)

Следующие утверждения верны (на координатной плоскости xOy):

1) Уравнение $x^2 - 1 = 0$ задаёт прямую.

2) Прямые, заданные уравнениями $2x - 3y + 6 = 0$ и $2x - 3y + 12 = 0$, параллельны.

3) Прямые, заданные уравнениями $2x - 3y + 6 = 0$ и $2x + 3y + 6 = 0$, пересекаются в точке $(1; 2)$.

4) Прямая, заданная уравнением $x - y + 9 = 0$, и окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 4$, имеют общую точку.

5) Уравнение $ax + by^2 = c$ при ненулевых a и b задаёт параболу.

Ответы: – + – – +

Тест 8

(к § 6 «Скалярное умножение векторов»)

Следующие утверждения верны:

1) Если модули двух ненулевых векторов не изменяются, а угол между ними возрастает, то их скалярное произведение убывает.

2) Если модули двух ненулевых векторов возрастают, а угол между ними не изменяется, то их скалярное произведение возрастает.

3) Координаты вектора $\vec{a}\ (x; y)$ равны его скалярным произведениям на единичные векторы осей координат: $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$.

4) Если на плоскости скалярные произведения некоторого вектора $\vec{a}$ на два неколлинеарных вектора равны нулю, то вектор $\vec{a}$ — нулевой.

5) Скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

Ответы: + – + + –

Тесты к главе II «Преобразования»

Тест 9

(к п. 7.1 «Понятие преобразования»)

Пусть преобразование f — проектирование на плоскости заданного квадрата K на некоторую прямую a. Тогда для любого взаимного расположения прямой a и квадрата K верны следующие утверждения:

1) Фигура $f(K)$ является отрезком.
2) Проекция любой диагонали квадрата K на прямую a является отрезком.
3) Проекция некоторой стороны квадрата является отрезком.
4) Проекция любых двух сторон квадрата K является отрезком.
5) Преобразование f имеет неподвижные точки.

Ответы: + – + – –

Тест 10

(к п. 7.3 «Взаимно обратные преобразования»)

Верны следующие утверждения:

Преобразование f фигуры M в фигуру P является взаимно однозначным преобразованием, если:

1) фигуры M и P — один и тот же параллелограмм, а f — центральная симметрия с центром O, где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма;
2) M — круг, P — прямая, а f — проектирование на эту прямую;
3) фигуры M и P — координатная плоскость xOy, а f сопоставляет точке $(x; y)$ точку $(2x; 3y)$;
4) фигуры M и P — координатная плоскость xOy, а f сопоставляет точке $(x; y)$ точку $(x^2; y^2)$;
5) M — некоторая прямая, P — луч этой прямой с началом в точке O, а f сопоставляет каждой точке X прямой M такую точку Y луча P, что $OY = OX^2$.

Ответы: + – + – –

Тест 11

(к пп. 8.1 и 8.2 «Свойства движений»)

Верны следующие утверждения:

Преобразование f фигуры M в фигуру P является движением, если:

1) фигуры M и P — координатная плоскость xOy, а f сопоставляет точке $(x; y)$ точку $(x + a, y - a)$;
2) M — отрезок, а $f(M)$ — прямая;
3) M — равносторонний треугольник, а $f(M)$ — прямоугольный треугольник;
4) фигуры M и P — координатная плоскость xOy, а f сопоставляет точке $(x; y)$ точку $(2x; 3y)$;
5) фигуры M и P — координатная плоскость xOy, а f сопоставляет точке $(x; y)$ точку $(-x; y)$.

Ответы: + – – – +

Тест 12

(к п. 8.3 «Параллельный перенос»)

Верны следующие утверждения:

Всегда существует параллельный перенос, который:

1) данную окружность преобразует в другую данную окружность того же радиуса;

2) данный угол переводит в другой данный угол, стороны которого сонаправлены сторонам первого угла;

3) в координатной плоскости xOy преобразует график функции $y = x^2 - 4x + 4$ в график функции $y = x^2 + 6x$;

4) данную прямую a преобразует в пересекающую её прямую b;

5) в координатной плоскости xOy сопоставляет каждой точке $(x;\ y)$ точку $(x + 3;\ y - 3)$.

Ответы: + + + – +

Тест 13

(к п. 8.4 «Центральная симметрия»)

Верны следующие утверждения:

Всегда существует центральная симметрия, которая:

1) данную окружность преобразует в другую данную окружность того же радиуса;

2) данный угол преобразует в другой данный угол, стороны которого параллельны сторонам первого угла;

3) преобразует друг в друга противоположные стороны данного параллелограмма;

4) данную прямую a преобразует в пересекающую её прямую b;

5) в координатной плоскости xOy преобразует график функции $y = x^2 - 4x + 4$ в график функции $y = -4 + 4x - x^2$.

Ответы: + – + – +

Тест 14

(к п. 8.5 «Осевая симметрия»)

Верны следующие утверждения:

Всегда существует осевая симметрия, которая:

1) данную окружность преобразует в другую данную окружность того же радиуса;

2) преобразует друг в друга два равных друг другу угла, имеющие общую вершину;

3) преобразует друг в друга две пересекающиеся прямые;

4) в координатной плоскости xOy сопоставляет каждой точке $(x;\ y)$ точку $(y;\ x)$;

5) преобразует катет прямоугольного треугольника в его гипотенузу.

Ответы: + + + + –

Тест 15

(к п. 8.7 «Поворот на плоскости»)

Верны следующие утверждения:

Всегда существует поворот, который:

1) данную окружность преобразует в другую данную окружность того же радиуса;
2) данный отрезок преобразует в другой данный отрезок той же длины;
3) данный луч преобразует в другой данный луч;
4) в координатной плоскости xOy преобразует фигуру, заданную уравнением $y - x^2 = 0$, в фигуру, заданную уравнением $y^2 + x = 0$;
5) преобразует одно основание трапеции в другое её основание.

Ответы: + + – + –

Тест 16

(к п. 8.9 «Равенство фигур и движения»)

Верны следующие утверждения:

Фигуры M и P равны, если:

1) фигура P получена из фигуры M композицией параллельного переноса и поворота;
2) фигуры M и P получены разными движениями одной и той же фигуры T;
3) фигура P получена из круга M композицией осевой симметрии и проектирования на ось симметрии;
4) фигура P получена из M композицией центральной симметрии с центром O и гомотетии с тем же центром и коэффициентом $k = 2$;
5) фигура P получена из треугольника M композицией гомотетии и проектирования на некоторую прямую.

Ответы: + + – – –

Тест 17

(к § 9 «Симметрия фигур»)

Верны следующие утверждения:

1) Правильный пятиугольник имеет пять осей симметрии.
2) Правильный пятиугольник имеет центр симметрии.
3) Правильный пятиугольник имеет центр поворота.
4) Правильная пятиугольная пирамида имеет пять плоскостей симметрии.
5) Правильная пятиугольная призма имеет пять плоскостей симметрии.

Ответы: + – + + –

Тест 18

(к п. 10.2 «Гомотетия»)

Верны следующие утверждения:

1) Средняя линия треугольника отсекает от треугольника гомотетичный ему треугольник.

2) Два треугольника, ограниченные диагоналями и основаниями трапеции, гомотетичны.

3) Два параллелограмма с соответственно параллельными сторонами гомотетичны.

4) Два прямоугольника с соответственно параллельными диагоналями гомотетичны.

5) Средняя линия трапеции разбивает её на две гомотетичные трапеции.

Ответы: + + – + –

Тест 19

(к п. 10.1 «Преобразование подобия и его свойства»
и к п. 10.3 «Свойства подобных фигур»)

Верны следующие утверждения:

1) Любые две полосы между параллельными прямыми подобны.

2) Любые два кольца между концентрическими окружностями подобны.

3) Любые два полукруга подобны.

4) Подобны параллелограммы, имеющие равные углы.

5) Подобны ромбы, имеющие равные углы.

Ответы: + – + – +

Тест 20

(к п. 10.4 «Признаки подобия треугольников»)

Верны следующие утверждения:

1) На одной стороне угла с вершиной O выбраны точки A и B, а на другой стороне угла выбраны точки K и M. Если $OA \cdot OB = OK \cdot OM$, то треугольники OAK и OMB подобны.

2) Если у двух равнобедренных треугольников имеются равные друг другу углы, то такие треугольники подобны.

3) Если две стороны и медиана к третьей стороне одного треугольника пропорциональны соответствующим двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники подобны.

4) Если высоты одного треугольника в два раза больше соответственных высот другого треугольника, то такие треугольники подобны.

5) Если AH и BK — высоты остроугольного треугольника ABC, то треугольники ACH и BCK подобны.

Ответы: + – + + +

Тесты к главе III «Геометрия круга»

Тест 21

(к п. 11.1 «Свойства хорд»)

Верны следующие утверждения:

1) Любые две равные хорды одной окружности равноудалены от центра окружности.

2) Любые две равные хорды одной окружности симметричны относительно некоторой прямой.

3) Любые две равные хорды одной окружности могут быть симметричны относительно лишь одной прямой.

4) Любые две равные хорды одной окружности можно совместить поворотом.

5) Любые две равные хорды одной окружности имеют разные середины.

Ответы: + + – + –

Тест 22

(к п. 11.2 «Касание прямой и окружности.
Взаимное расположение прямой и окружности»)

Верны следующие утверждения:

1) Центры окружностей, касающихся данной прямой в данной точке, лежат на одной прямой.

2) Центры окружностей, касающихся двух параллельных прямых, лежат на одной прямой.

3) Центры окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых, лежат на одной прямой.

4) Центры равных друг другу окружностей, касающихся заданной прямой, лежат на одной прямой.

5) Центры окружностей, касающихся сторон данного угла, лежат на его биссектрисе.

Ответы: + + – – +

Тест 23

(к п. 11.3 «Градусная мера дуги окружности»
и п. 11.4 «Измерение вписанных углов»)

Верны следующие утверждения:

1) Градусные меры равных дуг равны.

2) Если равны градусные меры дуг, то эти дуги равны.

3) Если сектор и сегмент одного и того же круга имеют общую хорду, то градусные меры их дуг равны.

4) Острый угол, вписанный в круг, не содержит никакого полукруга этого круга.

5) Тупой угол, вписанный в круг, содержит полукруг этого круга.

Ответы: + – – + +

Тест 24

(к п. 12.1 «Окружность, описанная вокруг многоугольника»)

Верны следующие утверждения:

Радиус описанной окружности больше 1, если она описана вокруг:

1) равностороннего треугольника со стороной 2;
2) равнобедренного треугольника со сторонами 0,5; 0,5; 0,8;
3) треугольника, в котором одна из сторон равна 1, а противоположный ей угол равен 20°;
4) прямоугольника с площадью 1 и углом между диагоналями, равным 60°;
5) трапеции, у которой три стороны равны 1, а четвёртая равна 2.

Ответы: + – + – –

Тест 25

(к п. 12.2 «Окружность, вписанная в многоугольник»)

Верны следующие утверждения:

Радиус вписанной окружности больше 1, если она вписана в:

1) равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 2;
2) ромб со стороной 2 и углом 60°;
3) равнобедренную трапецию с углом 120° и меньшим основанием, равным 2;
4) равнобедренный треугольник с основанием 2 и углом при основании 80°;
5) равнобедренный треугольник со сторонами 5, 5, 8.

Ответы: – – + – +

Тест 26

(к п. 12.3 «Замечательные точки треугольника. Окружность Эйлера»)

На плоскости введена система прямоугольных координат xOy с началом в точке O, фиксированы точки $A(-1; 0)$ и $B(1; 0)$, а переменная точка $C(0; y_C)$ перемещается по лучу $x = 0$, $y > 0$. Точка $P(0; y_P)$ — точка пересечения медиан треугольника ABC, точка $H(0; y_H)$ — точка пересечения высот треугольника ABC, точка $K(0; y_K)$ — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, точка $M(0; y_M)$ — центр вписанной окружности треугольника ABC. Координата y_C возрастает и пробегает интервал $(0; +\infty)$.

Верны следующие утверждения:

1) Координата y_K возрастает и пробегает всю числовую прямую $(-\infty; +\infty)$.
2) Координата y_H убывает от $+\infty$ и стремится к нулю.
3) Координата y_P возрастает и пробегает луч $(0; +\infty)$.
4) Координата y_M пробегает интервал $(0; 1)$.
5) Выполняются равенства $y_P = y_H = y_K = y_M$, когда $y_C = 2$.

Ответы: + + + + –

Тест 27

(к § 12 «Вписанные и описанные окружности»)

Верны следующие утверждения:

1) Многоугольник, все стороны которого равны, вписанный в некоторую окружность, правильный.

2) Многоугольник, все углы которого равны, вписанный в некоторую окружность, правильный.

3) Многоугольник, все стороны которого равны, описанный вокруг некоторой окружности, правильный.

4) Многоугольник, все углы которого равны, описанный вокруг некоторой окружности, правильный.

5) Многоугольник, обладающий поворотной симметрией, которая совмещает его соседние вершины, правильный.

Ответы: + – – + +

Тест 28

(к § 13 «Длина окружности и площадь круга»)

Верны следующие утверждения:

1) Длины дуг окружностей, проходящих через две данные точки, больше расстояния между этими точками и могут быть сколь угодно большими.

2) Два сектора одного круга, длины дуг которых равны, имеют равные площади.

3) Два сегмента одного круга, хорды которых равны, имеют равные площади.

4) Если площадь треугольника увеличилась, то длина окружности, описанной вокруг треугольника, тоже увеличилась.

5) Если площадь треугольника увеличилась, то площадь вписанного в него круга тоже увеличилась.

Ответы: + + – – –

Учебное издание

Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

Геометрия
Методические рекомендации
9 класс

Учебное пособие для
общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Руководитель центра *М. Н. Бородин*
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*, *Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *С. А. Крутикова*
Корректор *О. Н. Леонова*

ГЕОМЕТРИЯ

Примерная рабочая программа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа основного общего образования по геометрии составлена на основе Фундаментального ядра содержания общего образования и Требований к результатам освоения основной общеобразовательной программы основного общего образования, представленных в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования. В ней также учитываются основные идеи и положения Программы развития и формирования универсальных учебных действий для основного общего образования.

Овладение учащимися системой геометрических знаний и умений необходимо в повседневной жизни, для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Практическая значимость школьного курса геометрии обусловлена тем, что его объектом являются пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Геометрическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе.

Геометрия является одним из опорных предметов основной школы: она обеспечивает изучение других дисциплин. В первую очередь это относится к предметам естественно-научного цикла, в частности к физике. Развитие логического мышления учащихся при обучении геометрии способствует усвоению предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки геометрического характера необходимы для трудовой деятельности и профессиональной подготовки школьников.

Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении геометрических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, месте геометрии в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся, а также формированию качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности развитого воображения, геометрия развивает нравственные черты личности (настойчивость, целеустремлённость, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления) и умение аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения, а также способность принимать самостоятельные решения.

Геометрия существенно расширяет кругозор учащихся, знакомя их с индукцией и дедукцией, обобщением и конкретизацией, анализом и синтезом, классификацией и систематизацией, абстрагированием, аналогией. Активное использование задач на всех этапах учебного процесса развивает творческие способности школьников.

При обучении геометрии формируются умения и навыки умственного труда — планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическая оценка результатов. В процессе обучения геометрии школьники должны научиться излагать свои мысли ясно и исчерпывающе, лаконично и ёмко, приобрести навыки чёткого, аккуратного и грамотного выполнения математических записей.

Важнейшей задачей школьного курса геометрии является развитие логического мышления учащихся. Сами объекты геометрических умозаключений и принятые в геометрии правила их конструирования способствуют формированию умений обосновывать и доказывать суждения, приводить чёткие определения, развивают логическую интуицию, кратко и наглядно вскрывают механизм логических построений и учат их применению. Тем самым геометрия занимает ведущее место в формировании научно-теоретического мышления школьников. Раскрывая внутреннюю гармонию математики, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, способствуя восприятию геометрических форм, усвоению понятия симметрии, геометрия вносит значительный вклад в эстетическое воспитание учащихся. Её изучение развивает воображение школьников, существенно обогащает и развивает их пространственные представления.

Общая характеристика курса. В курсе условно можно выделить следующие содержательные линии: «Наглядная геометрия», «Геометрические фигуры», «Измерение геометрических величин», «Координаты», «Векторы», «Логика и множества», «Геометрия в историческом развитии».

Материал, относящийся к линии «Наглядная геометрия» (элементы наглядной стереометрии) способствует развитию пространственных представлений учащихся в рамках изучения планиметрии.

Содержание разделов «Геометрические фигуры» и «Измерение геометрических величин» нацелено на получение конкретных знаний о геометрической фигуре как важнейшей математической модели для описания окружающего мира. Систематическое изучение свойств геометрических фигур позволит развить логическое мышление и показать применение этих свойств при решении задач вычислительного и конструктивного характера, а также практических.

Материал, относящийся к содержательным линиям «Координаты» и «Векторы», в значительной степени несёт в себе межпредметные знания, которые находят применение как в различных математических дисциплинах, так и в смежных предметах.

Особенностью линии «Логика и множества» является то, что представленный здесь материал преимущественно изучается при рассмотрении различных вопросов курса. Соответствующий материал нацелен на математическое развитие учащихся, формирование у них умения точно, сжато и ясно излагать мысли в устной и письменной речи.

Линия «Геометрия в историческом развитии» предназначена для формирования представлений о геометрии как части человеческой культуры, для общего развития школьников, для создания культурно-исторической среды обучения.

Место предмета в учебном плане. Базисный учебный (образовательный) план на изучение геометрии в основной школе отводит 2 учебных часа в неделю в течение каждого года обучения, всего 210 уроков на базовом уровне и 3 часа в неделю на углублённом уровне, всего 305 уроков.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА ГЕОМЕТРИИ В 7—9 КЛАССАХ

Для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом (выделено *курсивом*) уровнях выпускник получит возможность научиться в 7—9 классах:

Геометрические фигуры

• Оперировать[1] понятиями геометрических фигур;

• извлекать, *интерпретировать и преобразовывать* информацию о геометрических фигурах, представленную на чертежах;

• применять для решения задач геометрические факты, если условия их применения заданы в явной форме; *а также предполагающих несколько шагов решения*;

• решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам;

• *формулировать свойства и признаки фигур*;

• *доказывать геометрические утверждения*;

• *владеть стандартной классификацией плоских фигур (треугольников и четырёхугольников)*.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать свойства геометрических фигур для решения типовых задач, возникающих в ситуациях повседневной жизни, задач практического содержания;

---

[1] Здесь и далее на:
базовом уровне — распознавать конкретные примеры общих понятий по характерным признакам, выполнять действия в соответствии с определением и простейшими свойствами понятий, конкретизировать примерами общие понятия;
углублённом уровне — знать определение понятия, уметь пояснять его смысл, уметь использовать понятие и его свойства при проведении рассуждений, доказательств, решении задач.

• *использовать свойства геометрических фигур для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин.*

Отношения

• Оперировать понятиями: равенство фигур, равные фигуры, равенство треугольников, параллельность прямых, перпендикулярность прямых, углы между прямыми, перпендикуляр, наклонная, проекция, *подобие фигур, подобные фигуры, подобные треугольники*;

• *применять теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках при решении задач*;

• *характеризовать взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать отношения для решения задач, возникающих в реальной жизни.

Измерения и вычисления

• Выполнять измерение длин, расстояний, величин углов с помощью инструментов для измерений длин и углов;

• применять формулы периметра, площади и объёма, площади поверхности отдельных многогранников при вычислениях, когда все данные имеются в условии;

• применять теорему Пифагора, базовые тригонометрические соотношения для вычисления длин, расстояний, площадей в простейших случаях;

• *оперировать представлениями о длине, площади, объёме как о величинах*;

• *применять теорему Пифагора, формулы площади, объёма при решении многошаговых задач, в которых не все данные представлены явно и которые требуют вычислений, оперировать более широким количеством формул длины, площади, объёма, вычислять характеристики комбинаций фигур (окружностей и многоугольников), вычислять расстояния между фигурами, применять тригонометрические формулы для вычислений в более сложных случаях, проводить вычисления на основе равновеликости и равносоставленности*;

• *проводить простые вычисления на объёмных телах*;

• *формулировать задачи на вычисление длин, площадей и объёмов и решать их.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• вычислять расстояния на местности в стандартных ситуациях, применять формулы и вычислять площади в простых случаях;

• *проводить вычисления на местности, применять формулы при вычислениях в смежных учебных предметах, в окружающей действительности.*

Геометрические построения

• Изображать типовые плоские фигуры и фигуры в пространстве от руки и с помощью инструментов;

• *изображать геометрические фигуры по текстовому и символьному описанию*;

• *свободно оперировать чертёжными инструментами в несложных случаях*;

• *выполнять построения треугольников, применять отдельные методы построений циркулем и линейкой и проводить простейшие исследования числа решений*;

• *изображать типовые плоские фигуры и объёмные тела с помощью простейших компьютерных инструментов.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• выполнять простейшие построения на местности, необходимые в реальной жизни;

• оценивать размеры реальных объектов окружающего мира.

Преобразования

• Строить фигуру, симметричную данной фигуре относительно оси и точки;

• *оперировать понятием движения и преобразования подобия, владеть приёмами построения фигур с использованием движений и преобразований подобия, применять полученные знания и опыт построений в смежных предметах и в реальных ситуациях окружающего мира*;

• *строить фигуру, подобную данной, пользоваться свойствами подобия для обоснования свойств фигур*;

• *применять свойства движений для проведения простейших обоснований свойств фигур.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• распознавать движение объектов в окружающем мире;

• распознавать симметричные фигуры в окружающем мире;

• *применять свойства движений и применять подобие для построений и вычислений.*

Векторы и координаты на плоскости

• Оперировать понятиями: вектор, сумма векторов, *разность векторов*, произведение вектора на число, *угол между векторами, скалярное произведение векторов,* координаты на плоскости, *координаты вектора*;

• определять приближённо координаты точки по её изображению на координатной плоскости;

• выполнять действия над векторами (сложение, *вычитание*, умножение на число), *вычислять скалярное произведение, определять в простейших случаях угол между векторами, выполнять разложение вектора на составляющие, применять полученные знания в физике, пользоваться формулой вычисления расстояния между точками по известным координатам, использовать уравнения фигур для решения задач*;

• *применять векторы и координаты для решения геометрических задач на вычисление длин, углов.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать векторы для решения простейших задач на определение скорости относительного движения;

• *использовать понятия векторов и координат для решения задач по физике, географии и другим учебным предметам.*

История математики

• Описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

• знать примеры математических открытий и их авторов в связи с отечественной и всемирной историей;

• понимать роль математики в развитии России;

• *характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей.*

Методы математики

• Выбирать подходящий изученный метод для решении изученных типов математических задач;

• приводить примеры математических закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства;

• *используя изученные методы, проводить доказательство, выполнять опровержение*;

• *выбирать изученные методы и их комбинации для решения математических задач*;

• *использовать математические знания для описания закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства*;

• *применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач.*

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ В 7—9 КЛАССАХ

(Содержание, выделенное *курсивом*, изучается на углублённом уровне)

Геометрические фигуры

Фигуры в геометрии и в окружающем мире. Геометрическая фигура. Формирование представлений о метапредметном понятии «фигура». Точка, линия, отрезок, прямая, луч, ломаная, плоскость, угол. Биссектриса угла и её свойства, виды углов, многоугольники, круг.

Осевая симметрия геометрических фигур. Центральная симметрия геометрических фигур.

Многоугольники. Многоугольник, его элементы и его свойства. Распознавание некоторых многоугольников. *Выпуклые и невыпуклые многоугольники*. Правильные многоугольники.

Треугольники. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника. Равнобедренный треугольник, его свойства и признаки. Равносторонний треугольник. Прямоугольный, остроугольный, тупоугольный треугольники. Внешние углы треугольника. Неравенство треугольника.

Четырёхугольники. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция, равнобедренная трапеция. Свойства и признаки параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата.

Окружность, круг. Окружность, круг, их элементы и свойства; центральные и вписанные углы. Касательная и *секущая* к окружности, *их свойства*. Вписанные и описанные окружности для треугольников, *четырёхугольников*, *правильных многоугольников*.

Геометрические фигуры в пространстве (объёмные тела). *Многогранник и его элементы. Названия многогранников с разным положением и количеством граней*. Первичные представления о пирамиде, параллелепипеде, призме, сфере, шаре, цилиндре, конусе, их элементах и простейших свойствах.

Отношения

Равенство фигур. Свойства равных треугольников. Признаки равенства треугольников.

Параллельность прямых. Признаки и свойства параллельных прямых. *Аксиома параллельности Евклида. Теорема Фалеса.*

Перпендикулярные прямые. Прямой угол. Перпендикуляр к прямой. Наклонная, проекция. Серединный перпендикуляр к отрезку. *Свойства и признаки перпендикулярности.*

Подобие. *Пропорциональные отрезки, подобие фигур. Подобные треугольники. Признаки подобия.*

Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.

Измерения и вычисления

Величины. Понятие величины. Длина. Измерение длины. Единицы измерения длины. Величина угла. Градусная мера угла. Понятие о площади плоской фигуры и её свойствах. Измерение площадей. Единицы измерения площади. Представление об объёме и его свойствах. Измерение объёма. Единицы измерения объёмов.

Измерения и вычисления. Инструменты для измерений и построений; измерение и вычисление углов, длин (расстояний), площадей. Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике *Тригонометрические функции тупого угла*. Вычисление элементов треугольников с использованием тригонометрических соотношений. Формулы площади треугольника, параллелограмма и его частных видов, формулы длины окружности и площади круга. Сравнение и вычисление площадей. Теорема Пифагора. *Теорема синусов. Теорема косинусов.*

Расстояния. Расстояние между точками. Расстояние от точки до прямой. *Расстояние между фигурами.*

Геометрические построения. Геометрические построения для иллюстрации свойств геометрических фигур. Инструменты для построений: циркуль, линейка, угольник. *Простейшие построения циркулем и линейкой: построение биссектрисы угла, перпендикуляра к прямой, угла, равного данному. Построение треугольников по трём сторонам, двум сторо-*

нам и углу между ними, стороне и двум прилежащим к ней углам. Деление отрезка в данном отношении.

Геометрические преобразования

Преобразования. Понятие преобразования. Представление о метапредметном понятии «преобразование». *Подобие.*

Движения. Осевая и центральная симметрия, *поворот и параллельный перенос. Комбинации движений на плоскости и их свойства.*

Векторы и координаты на плоскости

Векторы. Понятие вектора, действия над векторами, использование векторов в физике, *разложение вектора на составляющие, скалярное произведение.*

Координаты. Основные понятия, *координаты вектора, расстояние между точками. Координаты середины отрезка. Уравнения фигур. Применение векторов и координат для решения простейших геометрических задач.*

История математики

Возникновение математики как науки, этапы её развития. Основные разделы математики. Выдающиеся математики и их вклад в развитие науки. Бесконечность множества простых чисел. Числа и длины отрезков. Рациональные числа. Потребность в иррациональных числах. Школа Пифагора.

Зарождение алгебры в недрах арифметики. Ал-Хорезми. Рождение буквенной символики. П. Ферма, Ф. Виет, Р. Декарт. История вопроса о нахождении формул корней алгебраических уравнений степеней, больших четырёх. Н. Тарталья, Дж. Кардано, Н. Х. Абель, Э. Галуа.

Появление метода координат, позволяющего переводить геометрические объекты на язык алгебры. Появление графиков функций. Р. Декарт, П. Ферма. Примеры различных систем координат.

Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) о кроликах, числа Фибоначчи. Задача о шахматной доске. Сходимость геометрической прогрессии. Истоки теории вероятностей: страховое дело, азартные игры. П. Ферма, Б. Паскаль, Я. Бернулли, А. Н. Колмогоров.

От земледелия к геометрии. Пифагор и его школа. Фалес, Архимед. Платон и Аристотель. Построение правильных многоугольников. Трисекция угла. Квадратура круга. Удвоение куба. История числа π. Золотое сечение. «Начала» Евклида. Л. Эйлер, Н. И. Лобачевский. История пятого постулата.

Геометрия и искусство. Геометрические закономерности окружающего мира. Астрономия и геометрия. Что и как узнали Анаксагор, Эратосфен и Аристарх о размерах Луны, Земли и Солнца. Расстояния от Земли до Луны и Солнца. Измерение расстояния от Земли до Марса.

Роль российских учёных в развитии математики: Л. Эйлер. Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышев, С. В. Ковалевская, А. Н. Колмогоров. Математика в развитии России: Пётр I, школа математических и навигацких наук, развитие российского флота, А. Н. Крылов. Космическая программа и М. В. Келдыш.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала по учебно-методическому комплекту, не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания по геометрии разбиты на темы в хронологии их изучения по соответствующим учебникам.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нём содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, на организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим воззрениям, на использование современных технологий.

А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот «Геометрия, 7», «Геометрия, 8», «Геометрия, 9»

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
7 класс			
Введение. Что такое геометрия		**3**	
1, 2	Как возникла и что изучает геометрия. О задачах геометрии	1	Читать и понимать прочитанное: понять, что геометрия возникла из практики, что геометрические фигуры — это мысленные образы реальных предметов. Познакомиться с задачами геометрии и с важнейшей из этих задач — построением фигур с заданными свойствами
3, 4, 5	Плоские и пространственные фигуры. Плоскость, прямая, точка	1	Вспомнить уже известные геометрические фигуры: плоские (отрезок, прямоугольник, треугольник, квадрат, круг) и пространственные (простейшие многогранники и шар). Изображать эти фигуры, их объединение и пересечение в простейших случаях. Называть элементы многогранников. Понимать идеальный характер понятий *точка, прямая, плоскость*
6	Об истории геометрии. Евклид и его «Начала». Постулаты и аксиомы. Их роль в логическом построении геометрии. Значение геометрии	1	Узнать, как от опытной геометрии в Древнем Египте перешли к логической геометрии в Древней Греции, о роли Евклида и его «Начал». Приводить примеры постулатов и аксиом Евклида. Понимать значение геометрии в человеческой культуре

Глава I. Начала геометрии		**25**	
1.1	Отрезок. Концы отрезка и его внутренние точки. Тетраэдр	1	Приводить примеры реальных отрезков. Выполнять простейшие операции с отрезками: соединять отрезком две точки, разбивать отрезок на два внутренней точкой, продолжать отрезок за его концы. Строить конструкции из отрезков и приводить примеры таких конструкций
1.2	Лучи (полупрямые) и прямые. Полуплоскость	1	Определять луч (полупрямую) неограниченным продолжением отрезка за один из его концов, а прямую неограниченным продолжением отрезка за оба конца. Знать, что через каждые две точки проходит прямая и притом только одна. Определять пересекающиеся прямые. Знать о разбиении прямой на полупрямые, плоскости на полуплоскости, пространства на полупространства
1.3	Сравнение отрезков: их равенство и неравенство. Аксиома откладывания отрезка	1	Иллюстрировать сравнение реальных отрезков их наложением. Понятие равенства отрезков — основное. Формулировать две аксиомы о равенстве отрезков — аксиому сравнения и аксиому откладывания. Знать, что при изображении пространственных фигур равные отрезки могут изображаться неравными отрезками (например, рёбра куба). Знать определение равностороннего треугольника
1.4	Действия с отрезками	1	Выполнять (построением) сложение и вычитание отрезков, умножение отрезка на натуральное число. Знать о возможности деления отрезка на равные части
1.5	Длина отрезка. Измерение длины отрезка. Расстояние между точками	1	Знать два основных свойства длины отрезка: длины равных отрезков равны и при сложении отрезков их длины складываются. Знать, как в результате измерения отрезка

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
			появляется численное значение длины при выбранном единичном отрезке. Уметь изменить численное значение длины отрезка при замене единичного отрезка. Знать, что арифметические действия с численными значениями длин отрезков аналогичны действиям с самими отрезками. Знать о метрической системе длин
1.6	Понятие о равенстве фигур. Равенство треугольников	1	Судить о равенстве двух реальных предметов, измеряя расстояния между их соответствующими точками. Определять равенство двух треугольников равенством их соответствующих сторон. Аргументировать, почему дано такое определение, и применять его
	Решение задач по теме «Отрезки»	1	Решать задачи о построении отрезков по заданным условиям, задачи о вычислении длин (в частности, о вычислении периметров), представлять возможные ситуации в расположении отрезков, лучей и прямых и оценивать число таких ситуаций, решать задачи прикладного характера
2.1	Определения окружности и круга. Равные и концентрические окружности	1	Формулировать определения окружности и круга, равных и концентрических окружностей. Строить треугольник, равный данному треугольнику
2.2	Части окружности и круга: дуга, диаметр, хорда, сегмент, сектор. Хорда фигуры	1	Формулировать определения различных частей окружности и круга. Представлять возможные ситуации при объединении и пересечении разных частей круга

2.3	Центральная симметрия	1	Уметь объяснить, что значит: 1) две фигуры взаимно симметричны относительно некоторой точки; 2) некоторая фигура имеет центр симметрии. Приводить примеры фигур, имеющих центр симметрии, и изображать их
2.4	Построения циркулем и линейкой	1	Строить треугольник по трём сторонам. Понимать, что не для любых исходных данных задача на построение имеет решение. Понимать, что значит в геометрии единственность решения задачи на построение. Знать, что не любая задача на построение циркулем и линейкой разрешима этими инструментами, например задача об удвоении куба
2.5, 2.6	Как определяют сферу и шар. Сферическая геометрия	1	Если в 7—9 классах совсем не рассматривать стереометрический материал, то все элементы стереометрии, которые были изучены в «Наглядной геометрии» в 5—6 классах, будут забыты. Поэтому по аналогии с окружностью и кругом рассматриваются сфера и шар и даются наглядные представления о сферической геометрии
	Контрольная работа № 1	1	Ученики письменно решают задачи по темам «Отрезки» и «Окружность и круг»
3.1	Угол, вершина угла, стороны угла. Развёрнутый угол. Смежные углы. Выпуклый и невыпуклый углы	1	Формулировать определения понятий: угол, развёрнутый угол, выпуклый угол, невыпуклый угол, смежные углы, хорда угла. Изображать их и указывать на рисунках
3.2	Равенство углов. Аксиома о свойстве равных углов	1	Определять равенство двух углов как углов, которые имеют равные соответственные хорды. Аргументировать аксиому о свойстве равных углов. Выводить из неё

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
			утверждение о том, что соответственные хорды отсекают от равных углов равные треугольники. Видеть и указывать на рисунках равные углы
3.3	Откладывание угла. Аксиома откладывания угла. Построение угла, равного данному углу	1	Объяснять, что значит отложить угол от данного луча, формулировать аксиому откладывания угла. Строить угол, равный данному углу, циркулем и линейкой. Доказывать, что построенный угол — искомый
3.4	Сравнение углов. Прямой угол. Острый и тупой углы. Биссектриса угла	1	Уметь объяснять, как сравнить два угла. Формулировать определения понятий: прямой угол, острый угол, тупой угол, биссектриса угла. Сопоставлять на рисунках равные углы и равные отрезки. Доказывать равенство диагоналей квадрата и равенство диагоналей граней куба
3.5	Построение биссектрисы угла. Построение прямого угла	1	Строить циркулем и линейкой биссектрису данного угла (в частности, биссектрису развёрнутого угла). Давать доказательство выполненного построения. Делить пополам данный отрезок (циркулем и линейкой)
3.6	Вертикальные углы. Взаимно перпендикулярные прямые	1	Формулировать определение вертикальных углов и доказывать их свойство. Объяснять, какие прямые называют перпендикулярными

3.7	Действия с углами	1	Уметь складывать и вычитать углы, умножать их на натуральные числа, делить пополам. Знать о неразрешимости циркулем и линейкой задачи трисекции угла
3.8	Измерение углов. Градусная мера угла	1	Уметь рассказать о процессе измерения углов и об аналогии его процессу измерения отрезков. Знать о градусной мере углов
	Решение задач	2	Решать задачи на построение отрезков, углов и треугольников, задачи на доказательство, о равенстве отрезков, углов и треугольников, вычислительные задачи о мере угла
	Контрольная работа № 2	1	Письменная контрольная работа по теме «Углы»
3.9	Двугранный угол	1	Рассказать о том, как измеряется угол между пересекающимися плоскостями
Глава II. Треугольники		**20**	
4.1	О теоремах	1	Те утверждения, которые доказывают, называются теоремами. В главе I уже доказан ряд теорем (в частности, каждая из задач на доказательство — это теорема). Стоит вспомнить эти результаты главы I
4.2	Элементы треугольника	1	Находить и указывать в треугольнике прилежащие и противолежащие стороны и углы. Формулировать определение медианы треугольника
4.3	Первый признак равенства треугольников	1	Применить аксиому о свойстве равных углов и получить первый признак равенства треугольников. Понять структуру формулировки теоремы и дать аналогичные формулировки для некоторых доказанных ранее утверждений

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
4.4	Равенство соответственных углов равных треугольников	1	Выводить теорему о равенстве соответственных углов равных треугольников из определения равных углов. Судить о равенстве углов из равенства отрезков
	Решение задач	1	Применяя первый признак равенства треугольников и теорему 2 о равенстве углов, решать задачи на доказательство к пунктам 4.3, 4.4 главы II
4.5	Теорема о внешнем угле треугольника	1	Доказать теорему о внешнем угле треугольника
	Классификация треугольников	1	Провести классификацию треугольников по углам. Катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника
4.6	Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра	1	Формулировать определение перпендикуляра, проведённого из данной точки вне прямой к этой прямой, и доказывать его единственность. Вывести из этого утверждения признак параллельности прямых, перпендикулярных одной прямой
4.7	Доказательство способом от противного. Второй признак равенства треугольников	1	Знать, в чём состоит способ доказательства от противного, и уметь его применять. Доказывать этим способом второй признак равенства треугольников
4.8	Высота треугольника	1	Формулировать определение высоты треугольника, знать, как расположены высоты в остроугольном, прямоугольном и тупоугольном треугольниках

5.1	Равнобедренный треугольник и его свойства	1	Называть элементы равнобедренного треугольника, доказывать его свойства
5.2	Серединный перпендикуляр	1	Формулировать определение серединного перпендикуляра, доказывать теоремы о его свойстве и признаке. Строить циркулем и линейкой серединный перпендикуляр данного отрезка и опускать на прямую перпендикуляр из точки вне прямой
5.3	Взаимно обратные утверждения. Равносильные утверждения	1	Знать о структуре взаимно обратных утверждений. Уметь формулировать утверждение, обратное данному. Понимать применимость словесного оборота «тогда и только тогда» и знать о равносильных утверждениях. Приводить примеры равносильных и неравносильных взаимно обратных утверждений
5.4	Сравнение сторон и углов треугольника. Признак равнобедренного треугольника	1	Уметь доказать теорему о том, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а также и обратное утверждение. Выводить следствия этой теоремы: признак равнобедренного треугольника; катет короче гипотенузы; углы, прилежащие к большей стороне треугольника, острые; высота на бóльшую сторону треугольника лежит внутри его
	Решение задач	2	Решать планиметрические задачи к главе II на вычисление, доказательство и исследование
	Контрольная работа № 3	1	Письменная контрольная работа по главе II
5.5	Осевая симметрия	1	Объяснять, что значит две точки (две фигуры) симметричны относительно прямой и что значит фигура имеет ось симметрии. Приводить примеры фигур, обладающих осевой симметрией

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
	Оси симметрии угла, равнобедренного треугольника, окружности, круга	1	Доказать, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии, что равнобедренный треугольник имеет ось симметрии, что любая прямая, проходящая через центр окружности (круга) является её (его) осью симметрии
	Решение стереометрических задач	1	Решать задачи 5.20, II.1, II.16, II.17, II.18
Глава III. Расстояния и параллельность		**16**	
6.1	Понятие о расстоянии. Расстояние от точки до фигуры. Расстояние от точки до прямой	1	Объяснять, как находится расстояние от точки до фигуры (в частности, расстояние от точки до прямой), а также расстояние между фигурами. Приводить примеры из практики. Используя факт, что перпендикуляр короче наклонной, определить перпендикуляр, опущенный из заданной точки *A* на плоскость, как кратчайший отрезок, соединяющий точку *A* с точками этой плоскости. Это позволяет определить высоту пирамиды
6.2	Неравенство треугольника	1	Доказать, что сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Отсюда следует условие разрешимости задачи о построении треугольника по трём сторонам

	Решение задач	1	Решать задачи рубрики «Ищем границы» к § 6 и главе III
7.1	Признаки параллельности прямых	1	Знать, как называются пары углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой, и указывать их на рисунках. Из теоремы о внешнем угле треугольника получить как следствие признаки параллельности прямых
7.2	Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности	1	Знать, что пятый постулат Евклида даёт условия разрешимости задачи о построении треугольника по стороне и двум прилегающим к ней углам и является признаком непараллельности прямых. Формулировать аксиому параллельности прямых и установить, что она равносильна пятому постулату Евклида
7.3	Проблема пятого постулата и неевклидова геометрия	1	Знать о проблеме пятого постулата и её решении в первой половине XIX в. Н. И. Лобачевским — создателем неевклидовой геометрии
7.4	Свойства углов, образованных параллельными и секущей	1	Способом от противного доказывать свойства углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей
7.5	Построение прямоугольника	1	Построить прямоугольник с заданными измерениями. Определить равенство двух прямоугольников равенством их измерений. Формулировать признак прямоугольника: четырёхугольник с тремя прямыми углами является прямоугольником
7.6	Полоса	1	Полосой называется часть плоскости между параллельными прямыми. Расстояние между этими прямыми — ширина полосы. Это длина их общего перпендикуляра

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
8.1	Теорема о сумме углов треугольника	1	Формулировать и доказывать теорему о сумме углов треугольника
8.2	Следствия из теоремы о сумме углов треугольника	1	Выводить следствия из теоремы о сумме углов треугольника: 1) о сумме острых углов прямоугольного треугольника; 2) о внешнем угле треугольника; 3) об угле равнобедренного прямоугольного треугольника
	Решение задач	1	Решать задачи к § 7, 8 главы III
	Контрольная работа № 4	1	Письменная контрольная работа по главе III
1 (дополнение)	Аксиома прямоугольника	1	Можно заменить аксиому параллельности на аксиому о том, что можно построить прямоугольник с данными измерениями
2 (дополнение)	Сумма углов прямоугольного треугольника — следствие аксиомы прямоугольника	1	Из аксиомы прямоугольника выводится утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°
3 (дополнение)	Единственность параллельной прямой — следствие аксиомы прямоугольника	1	Опираясь на аксиому прямоугольника, можно доказать единственность прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую. В сильном классе можно дать второй вариант изложения темы о параллельности
	Резерв — 6 часов		

8 класс			
Введение. Повторение		**4**	
1	Треугольники	2	Вспомнить, что равенство двух треугольников можно установить по соответственным равенствам: 1) трёх пар сторон; 2) двух пар сторон и углов между ними; 3) паре сторон и прилежащим к ним углам. Повторить свойства и признаки равнобедренного треугольника и взаимно обратные теоремы о серединном перпендикуляре. Вспомнить теоремы о сравнении сторон и углов треугольника и теорему о сумме углов треугольника. Из задач к п. 1 особое внимание уделить задачам рубрики «Дополняем теорию»
2	Параллельность	1	Вспомнить названия углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой, повторить признаки параллельности прямых и свойства соответственных, накрест лежащих и односторонних углов при параллельных прямых, пересечённых третьей прямой
3	Множество (геометрическое место) точек	1	Объяснять, что такое геометрическое место точек. Приводить примеры геометрических мест точек
Глава I. Площади многоугольных фигур		**30**	
1.1	Ломаные и многоугольники	1	Распознавать ломаные и многоугольники, формулировать определения многоугольника и его элементов, приводить примеры многоугольников

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
1.2	Выпуклые и невыпуклые многоугольники	1	Распознавать выпуклые и невыпуклые многоугольники, формулировать их определения. Формулировать и доказывать теорему о сумме углов выпуклого многоугольника
1.3	Четырёхугольники	1	Распознавать выпуклые и невыпуклые четырёхугольники, доказывать теорему о сумме углов любого четырёхугольника
1.4	Правильные многоугольники	2	Строить правильные многоугольники из равнобедренных треугольников. Формулировать определение правильного многоугольника. Доказывать теорему о центре правильного многоугольника. Ознакомиться с историей задачи на построение правильного многоугольника циркулем и линейкой
1.5	Многоугольные фигуры	1	Формулировать определение многоугольной фигуры, приводить примеры таких фигур, разбивать многоугольную фигуру на многоугольные фигуры и составлять многоугольные фигуры из многоугольных фигур
1.6	Многогранники. Пирамиды	1	Формулировать определение многогранника. Конструировать пирамиду. Называть элементы пирамиды. Формулировать определения правильной пирамиды и правильного тетраэдра. Распознавать пирамиды на изображениях и изображать их при решении задач

2.1	Понятие площади. Измерение площади	1	Формулировать определение площади многоугольной фигуры. Объяснять и иллюстрировать понятия равновеликих и равносоставленных фигур. Объяснять, в чём состоит измерение площади и как получается численное значение площади
2.2	Площадь прямоугольника	1	Выводить формулу площади прямоугольника и решать задачи с использованием этой формулы
3.1	Теорема Пифагора	2	Формулировать и доказывать теорему Пифагора и теорему, обратную теореме Пифагора. Ознакомиться с разными доказательствами теоремы Пифагора
3.2 3.3	Пифагор Равносоставленные фигуры	1	Прочитать сведения о личности Пифагора и его роли в развитии культуры. Объяснять и иллюстрировать понятия равновеликих и равносоставленных фигур
3.4	Вычисление длин. Квадратный корень	1	Находить квадратный корень положительного числа. Вычислять длины сторон прямоугольных треугольников по теореме Пифагора
3.5	Наклонные и проекции	1	Ввести понятия наклонной к прямой и её проекции на прямую и сформулировать теорему Пифагора в терминах проекций
4.1	Площадь треугольника	2	Вывести формулу для площади треугольника и решать задачи на применение этой формулы
4.2	Формула Герона	1	Вывести формулу Герона и решать задачи на применение этой формулы

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
4.3	Трапеция	1	Распознавать, формулировать определения и изображать трапецию, равнобедренную и прямоугольную трапеции, доказывать, решая задачи, их свойства и признаки
	Площадь трапеции	1	Вывести формулу для площади трапеции и решать задачи с применением этой формулы
	Контрольная работа № 1	1	Решать задачи на теорему Пифагора, формулы для площадей треугольника и трапеции
5.1	Параллелограмм. Свойства параллелограмма	2	Распознавать, формулировать определение и изображать параллелограмм. Формулировать и доказывать теорему о свойствах параллелограмма. Решать задачи о свойствах параллелограмма
5.2	Признаки параллелограмма	2	Формулировать и доказывать четыре признака параллелограмма. Решать задачи на применение этих признаков
5.3	Прямоугольник, ромб, квадрат как частный случай параллелограмма	2	Доказывать теорему о том, что параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда диагонали его равны. Формулировать и доказывать утверждения о свойствах ромба. Решать задачи о прямоугольнике и ромбе
5.4	Площадь параллелограмма	2	Выводить формулу площади параллелограмма и применять её при решении задач

5.5	Параллелепипед. Призмы	1	Формулировать определения параллелепипеда и его элементов. Разбивать параллелепипед на две треугольные призмы. Конструировать из треугольных призм n-угольные призмы. Формулировать определения прямых и правильных призм. Изображать параллелепипеды и призмы. Приводить примеры правильных призм и правильных пирамид в архитектуре
	Контрольная работа № 2	1	Контрольная работа по теме «Параллелограмм»
Глава II. Геометрия треугольника		**29**	
6.1	Теорема об отношении перпендикуляра и наклонной	1	Находить отношение отрезков, зная их длины. Доказывать теорему об отношении перпендикуляра и наклонной
6.2	Определение синуса	1	Формулировать определение синуса любого выпуклого угла. Доказывать равенство синусов равных углов и смежных углов. Вычислять синусы углов заданной градусной меры и синусы углов простых многоугольников
6.3	Свойства синуса и его график	1	Объяснять изменение синуса угла при возрастании меры угла от 0 до 180°. Строить углы, синусы которых заданы, и находить величины этих углов
6.4	Решение прямоугольных треугольников	1	Выражать синус острого угла прямоугольного треугольника как отношение противолежащего ему катета к гипотенузе. Решать прямоугольные треугольники, используя синус
6.5	Вычисление площади треугольника	1	Выводить формулу $S = 0{,}5bc\sin A$ и применять её при решении задач

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
6.6	Теорема синусов	1	Доказывать теорему синусов. Решать треугольники по стороне и двум углам. Рассмотреть практические задачи на применение теоремы синусов
	Решение задач	1	Решать задачи по теме «Синус»
7.1	Определение косинуса	1	Формулировать определение косинуса для любого выпуклого угла. Установить зависимость косинусов смежных углов. Строить углы, косинусы которых заданы. Вычислять косинусы углов простых многоугольников
7.2	Основное тригонометрическое тождество	1	Выводить, опираясь на теорему Пифагора, основное тригонометрическое тождество. Знать, что для прямоугольного треугольника с единичной гипотенузой основное тригонометрическое тождество — это теорема Пифагора. Вычислять косинусы углов, градусные меры которых известны, и находить величины углов по их косинусам
7.3	Косинусы острых углов прямоугольного треугольника	1	Выражать косинус острого угла прямоугольного треугольника как отношение прилежащего к нему катета к гипотенузе. Решать прямоугольные треугольники, применяя косинус
7.4	Свойства косинуса и его график	1	Объяснять убывание косинуса от 1 до –1 при возрастании угла от 0 до 180° и единственность выпуклого угла, имеющего данный косинус

7.5	Теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора)	1	Доказывать теорему косинусов и применять её при решении треугольников. Определять вид треугольника по длинам его сторон
7.6 7.7	Средние линии треугольника и трапеции Применения косинуса в практике	2	Вывести из теоремы косинусов теорему о средней линии треугольника, а затем, применяя эту теорему, доказать теорему о средней линии трапеции. Решать задачи по теме «Косинус»
	Контрольная работа № 3	1	Контрольная работа по § 6, 7
8.1	Тангенс	1	Определять тангенс непрямого угла как отношение синуса этого угла к его косинусу. Выражать тангенс острого угла прямоугольного треугольника как отношение его катетов. Объяснять изменение тангенса угла при возрастании величины угла от 0 до 180°. Решать задачи с применением тангенса
8.2	Котангенс	1	Определять котангенс угла как отношение косинуса этого угла к его синусу. Выражать котангенс острого угла прямоугольного треугольника как отношение его катетов. Объяснять убывание котангенса в интервале (0°, 180°). Решать задачи с применением котангенса
8.3	Из истории тригонометрии	1	Ознакомиться с историей тригонометрии
9.1	Определение подобных треугольников	1	Формулировать определение подобных треугольников. Знать, что равенство треугольников — это частный случай их подобия. Доказывать подобие частных видов треугольников, используя определение подобия треугольников. Приводить примеры подобных фигур

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
9.2	Признаки подобия треугольников	1	Доказывать, опираясь на теоремы косинусов и синусов, два признака подобия треугольников. Решать задачи на эти признаки
9.3	Свойства подобных треугольников	1	Выводить, используя тригонометрию, свойства подобных треугольников: равенство соответствующих углов, отношение площадей. Решать задачи
10.1	Подобие треугольников и параллельность. Теорема Фалеса	1	Доказывать теорему о параллельных прямых, пересекающих сторону угла, частным случаем которой является теорема Фалеса. Решать задачи
10.2	Фалес	1	Прочитать о личности Фалеса и его роли в развитии культуры
10.3	Применения подобия при решении задач на построение	1	Решать задачи о делении отрезка на равные части, о построении четвёртого пропорционального. Применять метод подобия при решении задач на построение
10.4, 10.5	Построение среднего геометрического. Пентаграмма и золотое сечение	2	Строить циркулем и линейкой среднее геометрическое двух отрезков и делить отрезок в крайнем и среднем отношении. Строить циркулем и линейкой правильный пятиугольник и пентаграмму. Ознакомиться с их свойствами и с их применениями в архитектуре

10.6	Точка пересечения медиан треугольника	1	Доказывать теорему о точке пересечения медиан треугольника. Решать задачи
	Решение задач	1	Решать задачи по теме «Подобие треугольников»
	Контрольная работа № 4	1	Контрольная работа по теме «Подобие треугольников»
	Резерв — 7 часов		
9 класс			
Глава I. Векторы и координаты		**20**	
1.1	Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки	1	Формулировать определения и иллюстрировать понятия направленного отрезка, вектора, модуля (длины) вектора, коллинеарных и ортогональных векторов
1.2	Сонаправленность векторов	1	Формулировать определения сонаправленных и противоположно направленных векторов, доказывать признак сонаправленности векторов
1.3	Равенство векторов	1	Формулировать определение равных векторов и доказывать признаки равенства векторов
1.4, 1.5	О понятии вектора. Нуль-вектор. Угол между векторами	1	Формулировать определение угла между ненулевыми векторами и доказывать теорему о равенстве углов с сонаправленными сторонами
2.1, 2.2	Сложение векторов. Свойства сложения векторов	1	Выполнять сложение векторов по правилу треугольника и по правилу параллелограмма. Доказывать свойства сложения векторов

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
2.3	Вычитание векторов. Противоположные векторы	1	Выполнять вычитание векторов. Формулировать определение противоположных векторов
3.1, 3.2	Умножение вектора на число. Распределительные законы умножения векторов на число	1	Выполнять операцию умножения вектора на число и доказывать её свойства
4.1, 4.2	Векторный метод. Об истории теории векторов	1	Применять векторный метод при решении задач
5.1	Векторы на координатной оси	1	Вычислять координаты векторов на координатной оси и выполнять действия с ними
5.2	Векторы на координатной плоскости	1	Раскладывать векторы на составляющие по осям координат и вычислять координаты векторов
	Длина вектора, расстояние между точками, координаты середины отрезка	1	Вычислять длины векторов по их координатам, вычислять расстояния между точками, зная их координаты, находить координаты середины отрезка
5.3	Действия с векторами в координатной форме	1	Выполнять действия с векторами, заданными своими координатами
5.4	Метод координат. Уравнения окружности и прямой	2	Рисовать фигуры, заданные уравнениями и неравенствами. Выводить уравнения фигур

6.1	Косинус	1	Формулировать определение косинуса и основное тригонометрическое тождество, доказывать теорему косинусов
6.2	Скалярное произведение векторов	2	Формулировать определение скалярного произведения векторов, выражать его через координаты векторов, выводить из этой формулы свойства скалярного умножения, применять скалярное умножение при вычислении длин и углов
	Решение задач	2	Решать задачи по теме «Векторы и координаты»
	Контрольная работа № 1	1	Контрольная работа по теме «Векторы и координаты»
Глава II. Преобразования		**23**	
7.1	Понятие преобразования	1	Формулировать определения следующих понятий: преобразование фигуры, образ точки, образ фигуры, прообраз точки. Приводить примеры преобразований
7.2	Важные примеры преобразований	1	Формулировать определения центральной, осевой и зеркальной симметрий, параллельного переноса (короче — переноса), гомотетии. Изображать образы фигур при этих преобразованиях
7.3	Взаимно обратные преобразования	1	Формулировать определения взаимно однозначного преобразования и обратного ему преобразования. Строить преобразования, обратные симметриям, переносам и гомотетиям
7.4	Композиция преобразований	1	Формулировать определение композиции преобразований и строить композиции простейших преобразований

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
8.1	Определение и простейшие свойства движений	1	Формулировать определение движения фигуры, доказывать простейшие общие свойства движений, прочитать о связи геометрических и реальных движений
8.2	Свойства фигур, сохраняющиеся при движении	1	Формулировать свойства фигур, сохраняющиеся при движениях
8.3	Параллельный перенос	1	Доказывать характерное свойство переноса: перенос является движением, сохраняющим направления. Изображать фигуры, полученные переносом
8.4	Центральная симметрия	1	Доказывать, что центральная симметрия является движением. Изображать фигуры, полученные при центральной симметрии. Доказывать характерное свойство центральной симметрии — изменение направлений на противоположные
8.5	Осевая симметрия на плоскости	1	Доказывать характерное свойство осевой симметрии — наличие прямой, состоящей из неподвижных точек
8.6	Зеркальная симметрия	1	Доказывать характерное свойство зеркальной симметрии — наличие плоскости, состоящей из неподвижных точек
8.7	Поворот на плоскости		Формулировать определение поворота на плоскости. Формулировать и доказывать, что поворот является движением

8.8	Классификация движений плоскости	1	Понимать, что любое движение является одним из видов движений: поворотом, либо параллельным переносом, либо скользящей симметрией, частным случаем которой является осевая симметрия
8.9	Равенство фигур и движения	1	Формулировать два (равносильных) варианта равенства фигур. Проверить, что данное ранее определение равенства треугольников равносильно новому определению их равенства
9.1	Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур	1	Формулировать, что значит фигура обладает симметрией. Классифицировать симметрии фигуры по видам движений. Приводить примеры симметричных геометрических фигур и реальных предметов. Изображать и моделировать симметричные фигуры
9.2	Фигуры, обладающие переносной симметрией	1	Доказывать неограниченность фигур, обладающих переносной симметрией. Распознавать и конструировать бордюры и паркеты
9.3, 9.4	Элементы симметрии фигур. Симметрия правильных многоугольников	1	Распознавать элементы симметрии простейших симметричных фигур. Формулировать определение фигуры вращения
9.4, 9.5	Симметрия правильных пирамид и призм. Правильные многогранники	1	Перечислять элементы симметрии правильных пирамид и призм. Перечислять и моделировать правильные многогранники
10.1	Преобразование подобия и его простейшие свойства	1	Объяснять и иллюстрировать понятие подобия фигур. Приводить примеры подобных фигур. Доказывать простейшие свойства подобия. Выделять движение как частный случай подобия
10.2	Гомотетия	1	Доказывать свойства гомотетии

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
10.3	Свойства подобных фигур	1	Представлять подобие как результат последовательно выполненных гомотетии и движения. Доказывать свойства подобий
10.4	Признаки подобия треугольников	1	Рассмотреть частный случай подобных фигур — подобные треугольники. Доказывать его равносильность прежнему подходу к подобию треугольников, определённому через пропорциональность их сторон
	Решение задач	2	Решать задачи по всей теме «Подобие»
	Контрольная работа № 2	1	Контрольная работа по главе «Преобразования»
Глава III. Геометрия круга		**20**	
11.1	Свойства хорд	1	Формулировать и доказывать свойства хорд окружности. Формулировать определение центрального угла
11.2	Касание прямой и окружности	1	Формулировать определение касательной к окружности. Доказывать теорему о касательной к окружности
	Взаимное расположение прямой и окружности	1	Классифицировать случаи взаимного расположения прямой и окружности
11.3	Градусная мера дуги окружности	1	Формулировать определения градусной меры дуги окружности и равенства дуг. Вычислять градусные меры дуг
11.4	Измерение вписанных углов	1	Формулировать определение вписанного угла, доказывать теорему об измерении вписанного угла и выводить её следствия. Вычислять вписанные углы

11.5	Произведение отрезков хорд	1	Доказывать теорему о произведении хорд и вычислять отрезки хорд
	Произведение отрезков секущих	1	Доказывать теоремы о произведении отрезков секущих и квадрате касательной. Вычислять отрезки секущих и касательные
11.6	Взаимное расположение двух окружностей	1	Классифицировать взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов и расстояния между центрами
12.1	Окружность, описанная вокруг многоугольника	1	Формулировать определение описанной вокруг многоугольника окружности, приводить примеры многоугольников, имеющих описанную окружность и не имеющих её, доказывать теорему об окружности, описанной вокруг треугольника
	Радиус окружности, описанной вокруг треугольника	1	Выражать радиус описанной вокруг треугольника окружности через сторону треугольника и синус противолежащего угла. Как следствие этой формулы получить теорему синусов
12.2	Окружность, вписанная в многоугольник	1	Формулировать определение вписанной в многоугольник окружности, приводить примеры многоугольников, имеющих вписанную окружность и не имеющих её, доказывать теорему об окружности, вписанной в треугольник. Выразить площадь треугольника через периметр и радиус вписанной в него окружности
12.3	Замечательные точки треугольника	1	Доказывать теорему о точке пересечения медиан треугольника
	Окружность Эйлера	1	Доказывать теорему об ортоцентре треугольника
13.1	Измерение длины кривой. Длина окружности	1	Доказать, что длина окружности пропорциональна её радиусу

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
13.2	Длина дуги окружности	1	Вычислять длины дуг окружности, зная их градусные меры
13.3	Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга	1	Вывести формулу для площади круга. Вычислять площади кругов
	Площадь сектора	1	Вычислять площадь сектора круга, зная градусную меру его дуги
13.4	Число π	1	Ознакомиться с историей, связанной с числом π
14.1*, 14.2*	Цилиндры и конусы. Объёмы цилиндра и конуса	1	Ввести понятия цилиндра, конуса, образующей, основания, развёртки. Выводить формулы для вычисления площадей их поверхностей и объёмов
14.3*, 14.4*	Сфера и шар. Объём шара. Площадь сферы. Архимед	1	Вспомнить основные понятия, связанные со сферой и шаром. Выводить формулы для вычисления объёма шара и площади его поверхности, ознакомиться с историей их доказательства Архимедом
	Решение задач по теме «Окружность и круг»	1	Решение вычислительных задач, связанных с окружностью и кругом
	Контрольная работа № 3	1	Контрольная работа по теме «Окружность и круг»
	Итоговое повторение и итоговая контрольная работа	5	

* — так обозначены пункты для интересующихся математикой